Példa a dualitási tételek alkalmazására

Tekintsük nemnegatív x_1, x_2, x_3 esetén $3x_1 - 2x_2$ maximalizálását a következő két feltétel teljesülése esetén: $4x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 10$, $3x_1 + 6x_3 \geq 8$. Fel kell írnunk a feladat duálisát és meg kell oldanunk mindkét feladatot.

Legelőször primál alakú feladatot alakítunk ki. Ehhez az utolsó feltételt minuszegyszerezni kell. Majd felírjuk

$$\begin{array}{cc} A & b \\ c^{\mathsf{T}} & \max \end{array}$$

elrendezésben az adatokat:

$$\begin{array}{rrrcr} 4 & 5 & 1 & & 10 \\ -3 & 0 & -6 & & -8 \\ & & & & \\ 3 & -2 & 0 & & \max \end{array}$$

Most transzponáljuk ezt az elrendezést:

$$\begin{array}{rrcr} 4 & -3 & & 3 \\ 5 & 0 & & -2 \\ 1 & -6 & & 0 \\ & & & \\ 10 & -8 & & \min \end{array}$$

Innét kiolvassuk a duális feladatot: $y_1, y_2 \geq 0$, $4y_1 - 3y_2 \geq 3$, $5y_1 \geq -2$, $y_1 - 6y_2 \geq 0$ és minimalizálni kell a $10y_1 - 8y_2$ függvényt.

A feladatpár megoldását a kettő közül bármelyik feladat megoldásával kezdhetjük. Az eredeti feladat megoldása kétfázisú lexikografikus szimplex módszerrel így alakul:

$$\begin{array}{c|cccccc} 10 & 4 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 0 & (6) & 0 & -1 & 1 \\ \hline 0 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -3 & 0 & -6 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccc} 26/3 & 7/2 & 5 & 0 & 1 & 1/6 & -1/6 \\ 4/3 & 1/2 & 0 & 1 & 0 & -1/6 & 1/6 \\ \hline 0 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} 26/3 & (7/2) & 5 & 0 & 1 & 1/6 \\ 4/3 & 1/2 & 0 & 1 & 0 & -1/6 \\ \hline 0 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
52/21 & 1 & 10/7 & 0 & 2/7 & 1/21 \\
2/21 & 0 & -5/7 & 1 & -1/7 & -4/21 \\
\hline
52/7 & 0 & 44/7 & 0 & 6 & 1/7
\end{array}
$$

Az optimális megoldás tehát ez: $x_1^* = \frac{52}{21}$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = \frac{2}{21}$. Ezeket az értékeket visszahelyettesítjük az $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $4x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 10$, $3x_1 + 6x_3 \geq 8$ egyenlőtlenségekbe, és csak a következő „lazaságokat" tapasztaljuk: $x_1^* > 0$, $x_3^* > 0$, hiszen $4 \cdot \frac{52}{21} + \frac{2}{21} = 10$ és $3 \cdot \frac{52}{21} + 6 \cdot \frac{2}{21} = 8$. Tehát a duális feladat y^* optimális megoldásában egyenlőség lesz a laza feltételeknek megfelelő egyenlőtlenségekben, azaz

$$
\begin{aligned}
4y_1^* - 3y_2^* &= 3 \\
y_1^* - 6y_2^* &= 0
\end{aligned}
$$

Megoldva: $y_1^* = \frac{6}{7}$, $y_2^* = \frac{1}{7}$. Az optimális célfüggvényérték mindkét feladatnál: $\frac{52}{7}$, hiszen

$$
3 \cdot \frac{52}{21} = 10 \cdot \frac{6}{7} - 8 \cdot \frac{1}{7} = \frac{52}{7}
$$

Ha fordítva gondolkodtunk volna, akkor is ugyanezt az eredményt kaptuk volna. Tehát az y-ra vontakozó feladatot tekintve elsőként akár grafikusan is könnyen megoldhatjuk. Vagy rögtön észrevehetjük, hogy $y_1 \geq 0$ miatt az $5y_1 \geq -2$ egyenlőtlenségben szükségszerűen lazaság van, tehát y^* meghatározásához semmi szükség rá. Az $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$, $4y_1 - 3y_2 \geq 3$, $y_1 - 6y_2 \geq 0$ egyenlőtlenségekből pedig $10y_1 - 8y_2 \geq \frac{52}{7}$ következik, mely tény kétfázisú lexikografikus szimplex módszerrel való bizonyítása az alábbi:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
3 & 4 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & (1) & -6 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 10 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-3 & -5 & 9 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
3 & 0 & 21 & -1 & (4) & 1 & -4 \\
0 & 1 & -6 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 52 & 0 & 10 & 0 & -10 \\
-3 & 0 & -21 & 1 & -4 & 0 & 5
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
\frac{3}{4} & 0 & (\frac{21}{4}) & \frac{-1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & -1 \\
\frac{3}{4} & 1 & \frac{-3}{4} & \frac{-1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\
\hline
\frac{-15}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{5}{2} & 0 & \frac{-5}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cccc}
\frac{1}{7} & 0 & 1 & \frac{-1}{21} & \frac{4}{21} \\
\frac{6}{7} & 1 & 0 & \frac{-2}{7} & \frac{1}{7} \\
\hline
\frac{-52}{7} & 0 & 0 & \frac{52}{21} & \frac{2}{21}
\end{array}
$$