Egerváry Jenő egy 60 éves feladatáról

Hujter M.
http://math.bme.hu/~hujter

Egerváry Jenő — a BME világhírű professzora — halálának 50. évfordulójára ezekben a napokban megemlékezés szerveződik. Erre készülve akadtam a „Kalmárium 2"-ben [2] Hajós György soraira Kalmár Lászlóhoz [1]:

Egerváry említett multkor jó versenypéldának való feladatot. Az ő engedelmével propozícióként közlöm: Egy kört érint két kör (mindkettő kívülről, vagy egyik sem). Az első kör sugara a másik kettő sugarának számtani közepe. Bizonyítandó, hogy a két érintési pont távolsága merőleges a két érintő kör centrálisára.

Mivel a feladat szövegét nem értettem, írtam Szabó Péter Gábor kollégának, hogy nyomdahibát sejtek. Hiányozna valami? [3].

A nyomdai közlés pontos volt, de az eredeti levél egy áthúzott részt is tartalmazott, segített ki a kolléga [3] (lásd a jelen cikk második oldalán).

Sajnos hiába fejtettem meg az áthúzott részt: „*és a két érintő kör középpontja egyenesére merőleges egyenes*", nem lett a feladat világos. Ha a merőlegességet párhuzamosságra cseréljük, akkor sem lesz igaz az állítás. A ténylegesen kitűzött versenyfeladatok között sem találtam hasonló állításra.

Kollégáknál érdeklődtem, hogy emlékeznek-e hasonló feladatra. Nem sikerült ilyenre akadni. Magam álltam neki a hosszas próbálkozásnak, és végül a feladat alábbi átjavítását vélem elfogadhatónak:

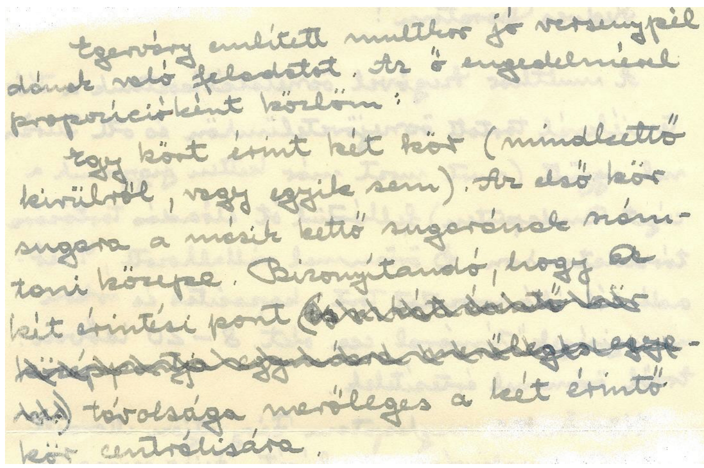
Egy kört érint két kör (mindkettő kívülről). Az első kör sugara a másik kettő sugarának számtani közepe. Bizonyítandó, hogy a két érintési pont ***alkotta húr egyenesének*** *távolsága* ***az első kör középpontjától megegyezik*** *a két érintő kör* ***középpontja szakaszának felezőpontjától vett távolsággal (azaz az első középpontnak a húrtól mért távolsága megegyezik a másik két középpont átlagos távolságával).***

A feladat ezen változatának most egy magam által kreált bizonyítását is közlöm:

Bizonyítás: Vektorosan az első kör középpontja legyen az origó, a két érintési pont pedig $2a$ illetve $2b$. Ekkor a húr távolsága az origótól: $|a+b|$. A két érintő kör középpontja valamely 1-nél kisebb abszolút értékű t-re: $(4-2t)a$ illetve $(4+2t)b$. A centrálison a szakaszközéppont:

$$\frac{(4-2t)a+(4+2t)b}{2} = 2(a+b) - t(a-b)$$

Mivel a húr középpontja $a+b$, és ez, mint vektor, merőleges a húrra, ezért a centrálison a szakaszközéppont távolsága a húrtól éppen $|a+b|$-vel kevesebb,



Egerváry említett multkor jó versenypél-
dának való feladatot. Az ő engedelmével
propozícióként közlöm:
Egy kört érint két kör (mindkettő
kívülről, vagy egyik sem). Az első kör
sugara a másik kettő sugarának szám-
tani közepe. Bizonyítandó, hogy a
két érintési pont ~~[illegible]~~
~~[illegible]~~
~~[illegible]~~) távolsága merőleges a két érintő
kör centrálisára.

mint a centrálison a szakaszközéppontnak (mint vektornak) az $a+b$ egyenesére eső vetület-hossza, mely utóbbi:

$$\frac{(a+b)\,(2(a+b)-t(a-b))}{|a+b|}$$

De itt a számláló

$$(a+b)\,(2(a+b)-t(a-b)) = 2(a+b)^2 - t(a^2-b^2) = 2(a+b)^2$$

mert nyilván $a^2=b^2$, az első körrel koncentrikus, fele akkora sugarú körön fekvő a és b pontokról lévén szó. A bizonyítás kész, hiszen

$$\frac{2(a+b)^2}{|a+b|} - |a+b| = |a+b|$$

Hivatkozások:

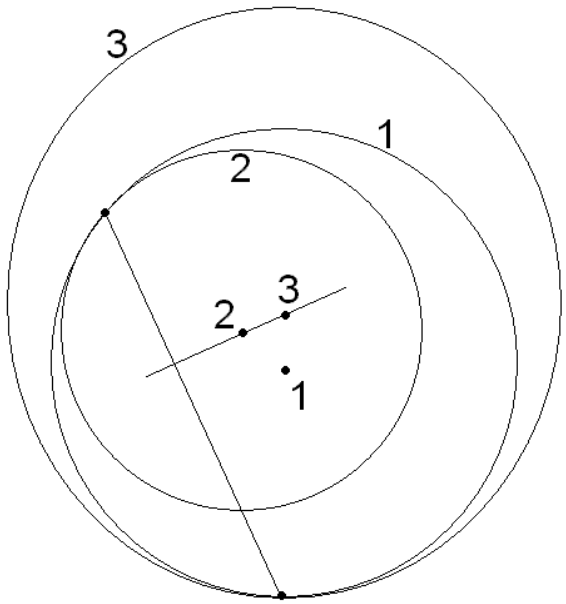
1. Hajós György levele Kalmár Lászlónak 1948 őszén (lásd [2]).

2. Szabó Péter Gábor: *Kalmárium II.*, Kalmár László levelezése magyar matematikusokkal (Aczél János, Fenyő István, Gyires Béla, Hajós György, Lakatos Imre, Lázár Dezső stb) , Szeged, 2008. **Polygon** kiadó.

— `http://www.sulinet.hu/tart/fcikk/Kca/0/33642/1#a`

3. Email-váltás Szabó Péter Gábor és Hujter Mihály között, 2008. október.

Kiegészítés: A fenti kézirat elkészítése utáni napon kaptam G. Horváth Ákostól egy emailt, melyben a következő értelmezést adja:



Az eredeti feladat akkor jó, ha mindkét kör belülről érint, azaz

Egy kört érint két kör (a kisebbik belülről érint, a nagyobbikat az első belülről érinti). Az első kör sugara a másik kettő sugarának számtani közepe. Bizonyítandó, hogy a két érintési pont távolságának egyenese merőleges a két érintő kör centrálisára (középpontjukat összekötő egyenesre).

A megoldás ekkor egyszerűen adódik, mert a középpontok által meghatározott háromszög egyenlőszárú. Ennek alapja a centrális egyenes, a szárak közös csúcsából induló szögfelező pedig párhuzamos az érintési pontokat összekötő szakasszal.