Optimumszámítás — Kérdések és válaszok
`http://math.bme.hu/~hujter`

Kérdés: Igaz-e (és miért illetve miért nem), hogy minden optimális megoldás duál megengedett? **Válasz:** A duál megengedettséget csak bázismegoldásra értelmezzük, de lehetnek nem bázismegoldás optimális megoldások is. Az optimális bázismegoldások duál megengedettek.

Kérdés: Meg lehet-e oldani duál szimplex módszerrel minden duál alakú lineáris programozási feladatot? Ha igen, hogyan, ha nem, miért nem? **Válasz:** A duál szimplex módszer indításához duál megengedett bázismegoldás szükséges. Egy duál alakú feladat célfüggvénye is lehet nemkorlátos, és ilyenkor a duál szimplex módszer szóba sem jöhet.

Kérdés: Ha lehet duál szimplex módszerrel megoldani a hozzárendelési feladatot, miért nem azzal csináljuk? Vagy nem is lehet? **Válasz:** Igen, lehetne. De a magyar módszer hatékonyabb (azaz gyorsabb, és kevesebb adminisztációt igénylő) megoldás.

Kérdés: A szállítási feladatot módosított (helyesebben mondva: revízió alá vett) szimplex módszerrel megoldva hányszor hányas mátrixok invertálására van szükség, ha a költségmátrix $m \times n$ méretű. **Válasz:** A sorösszegekre és oszlopösszegekre vonatkozó feltételek darabszáma $m + n$, de az itteni együtthatómátrix rangja csak $m + n - 1$. Tehát a revízió alá vett szimplex módszerben az invertálandó mátrixok mérete $(m + n - 1) \times (m + n - 1)$. (Szerencsére ezeket a mátrixokat viszonylag könnyű invertálni, ezért a nagy méret ellenére sem kell a szimplex módszert elvetni.)

Kérdés: Fel lehet-e standard alakra írni egy 2×2-es hozzárendelési feladatot? **Válasz:** Igen. Ha a költségmátrix $\binom{c_{11}\, c_{12}}{c_{21}\, c_{22}}$, akkor

$$\begin{aligned} x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} &\geq 0; \quad (-c_{11}x_{11} - c_{12}x_{12} - c_{21}x_{21} - c_{22}x_{22}) \to \max \\ x_{11} + x_{12} &= 1; \quad x_{21} + x_{22} = 1; \quad x_{11} + x_{21} = 1 \end{aligned}$$

Kérdés: Igaz-e (miért illetve miért nem), hogy egy 3×4-es költségmátrixú szállítási feladatnak egyértelmű az optimális megoldása? **Válasz:** Még optimális bázismegoldásból (alapmegoldásból) is lehet több! Ha legalább két optimális bázismegoldás van, akkor a nem bázismegoldások, de optimális megoldások darabszáma végtelen sok.

Kérdés: Ha egy (standard alakú) lineáris programozási feladatnak csak egy optimális megoldása van, az bázismegoldás-e? **Válasz:** Igen. Mert az optimális megoldások között mindig van bázismegoldás is. Ha egy optimális megoldás van, az szükségszerűen bázismegoldás. Ha egynél több optimális megoldás van, akkor már végtelen sok is van, és azok között legalább két bázismegoldásnak is kell lenni.

Kérdés: Lehet-e az, hogy egy (standard alakú) lineáris programozási feladatnál két (vagy több) bázis is optimális, de csak egyetlen optimális bázismegoldás van? **Válasz:** Igen, lehetséges, de csak a „degenerált" esetben, azaz amikor mindegyik optimális bázishoz tartozó bázismegoldásnak kevesebb komponense pozitív, mint a dimenziószám.

Kérdés: Ha egy (standard alakú) lineáris programozási feladatnak nemkorlátos a célfüggvénye, akkor létezhet-e primál megengedett bázismegoldás? **Válasz:** Létezhet, sőt kell is léteznie. A primál megengedett bázismegoldások darabszáma véges, és mindegyiken kipróbálva a célfüggvény értékét kiválaszthatjuk a legjobb primál megengedett bázismegoldást. Ha nemkorlátos a célfüggvény, akkor van olyan megengedett megoldás (ami viszont nem bázismegoldás), melyen jobb a célfüggvény értéke.

Kérdés: Ha egy (standard alakú) lineáris programozási feladatnak nincs primál megengedett megoldása, akkor létezhet-e duál megengedett bázismegoldás? **Válasz:** Létezhet. Olyankor van ez így, például, amikor a duál szimplex módszer végén nem optimális megoldást kapunk.

Kérdés: Ha egy (primál alakú) lineáris programozási feladatot standad alakra hozva a bázismegoldásainak fele primál megengedett, és azoknak a fele duál megengedett, akkor a duális feladatnak (annak standard alakra hozása után) lehet-e vagy mindig van-e olyan bázismegoldása, ami egyszerre primál és duál megengedett is? **Válasz:** Nemcsak, hogy lehet, de mindig van is legalább egy. Mindez az „erős" dualitási tételből következik.

Kérdés: A szállítási feladatnál lehet-e nemkorlátos a célfüggvény? **Válasz:** Nem, mert mindig van optimális megoldás. Minden primál megengedett megoldáshoz van (legalább egy) ugyanolyan célfüggvényértékú alapmegoldás, és ezért a véges sok alapmegoldáshoz tartozó célfüggvényértékek korlátozzák a célfüggvényt.

Kérdés: Lehet-e negatív a kétfázisú szimplex módszer első fázisánál az optimális célfüggvényérték? **Válasz:** Igen. Akkor van ez így, ha az eredeti feladatnak nincs primál megengedett megoldása.

Kérdés: Lehet-e negatív a kétfázisú szimplex módszer második fázisánál az optimális célfüggvényérték? **Válasz:** Igen. Például akkor, ha az eredeti feladat célfüggvénye minimalizálás volt, és minden célfüggvény-együttható pozitív.

Kérdés: Hogyan tudna felírni egy 2×2-es hozzárendelési feladatot duál alakú lineáris programozási feladatként? **Válasz:** Ha a költségmátrix $\binom{c_{11}\, c_{12}}{c_{21}\, c_{22}}$, akkor

$$\begin{aligned} x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} &\geq 0; \quad (c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22}) \to \min \\ x_{11} + x_{12} &\geq 1; \quad x_{21} + x_{22} \geq 1; \quad x_{11} + x_{21} \geq 1 \\ -x_{11} - x_{12} &\geq -1; \quad -x_{21} - x_{22} \geq -1; \quad -x_{11} - x_{21} \geq -1 \end{aligned}$$

Kérdés: A módosított (helyesen mondva: revízió alá vett) szimplex módszernél mindig újrainvertáljuk-e a bázis mátrixát? **Válasz:** Nem kell. Mivel a bázisban lépésenként csak egy-egy vektor cserélődik ki, ezért az invertáláshoz szükséges lépéseknél kevesebb lépéssel is kiszámítható az előző adatokból az új inverz. De nincs is szükségünk a teljes inverzre, hanem csak néhány vektorra, amit az inverz explicit kiszámítása nélkül is elő tudunk állítani.

Kérdés: Ha egy $Ax \leq b$, $x \geq 0$, $c^T x \to \max$ alakú feladatban minden inputadat pozitív, akkor a duális feladatnál lehet-e nemkorlátos a célfüggvény. **Válasz:** Nem, mivel ennek az eredeti feladatnak (azt standard alakra hozva) nyilvánvalóan van primál megengedett megoldása, nevezetesen ha A mérete $m \times n$, akkor $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ és $x_{n+1} = b_1, x_{n+2} = b_2, ..., x_{n+m} = b_m$. Egyébként optimális megoldás is van mindegyik feladatnál!

Kérdés: Módosított (helyesen mondva: revízió alá vett) szimplex módszernél hogyan használódik ki, ha az együtthatómátrix széles, de sokkal laposabb? **Válasz:** A szimplex táblázatoknak csak egy kicsi, keskeny részét kell mindig kiszámítani.

Kérdés: Igaz-e, hogy a lexikografikus duál szimplex módszernél a megoldás oszlopa (a kezdő, azaz „nulla indexű” oszlop) iterációról iterációra növekszik lexikografikusa? **Válasz:** Igaz. A pivotelem lexikografikus kiválasztása pont ezt biztosítja.

Kérdés: Egy optimális bázismegoldásban az eltérésváltozók („slack") és a mesterséges („artificial") változók közül melyek értéke lehet pozitív, és melyek értéke lehet negatív? **Válasz:** Negatív egyik sem lehet! Soha! A mesterségesek még pozitívak sem, hisz mindegyiknek kötelezően nullának kell lenni. Az eltérésváltozók közül néhány maradhat pozitív, akár az összes is, de akár mind kinullázódhat.

Kérdés: Lehetnek-e egy duál megengedett bázismegoldásnak negatív komponensei? **Válasz:** Igen. Ha egy duál szimplex táblázat még nem optimális, akkor a hozzá tartozó duál megengedett megoldásnak van is negatív komponense. Éppen annak alapján pivotálunk.

Kérdés: Hogyan nevezzük azt a feladatot, melynek egyfajta megfogalmazása a következő: C, X mátrixok, melyek mérete $m \times n$, e, f, a, b vektorok rendre m, n, m, n darab pozitív egész komponenssel, e és f minden komponense 1-es, $X \geq 0$, $f^T X = b$, $Xe = a$, és a C és X mátrixok „skalárszorzata" minimalizálandó. **Válasz:** Ez a szállítási feladat.

Kérdés: Írjon fel egy olyan költségmátrixot a $n \times n$-es hozzárendelési feladathoz ($n \geq 3$), melynél a főátló nem optimális megoldáshoz tartozik, de legalább két optimális megoldás van. **Válasz:** Például az egységmátrix.

Kérdés: Ha egy feladatot meg tud oldani duál szimplex módszerrel és kétfázisú szimplex módszerrel is, és a duál szimplexnél nem kap optimális megoldást, akkor hogyan végződik a kétfázisúnál az első fázis? **Válasz:** Negatív marad az optimális mesterséges célfüggvény-érték, azaz nem sikerül az összes mesterséges változót kiküszöbölni; nincs megengedett megoldás.

Kérdés: Egy (primál alakú) kétismeretlenes lineáris programozási feladat grafikus megoldása során a pozitív síknegyedben, az origótól távol, két egyenes metszéspontjaként kapja meg az (lehet, hogy csak az egyik) optimális megoldást. Hogyan állapítja meg, hogy ez az egyedüli optimális megoldás-e? **Válasz:** Ha a két egyenes egyike sem merőleges a célfüggvény normálvektorára (azaz egyik egyenes sem párhuzamos a célfüggvény szintvonalaival), akkor (és csak akkor) egyértelmű az optimális megoldás.