Euler egy elfelejtett geometriai tétele

Hujter, M.

2000. október

Tartalmi összefoglaló: Euler egyik elfelejtett tétele determinánsokra és pontok távolságára vonatkozik. Ha nem gond ötször-ötös determinánsokkal számolnunk, akkor a tétellel a geometrai számításaink — sőt a nehéz geometriai tételek bizonyításai is — pillanatok alatt elvégezhető rutinfeladattá válhatnak. A jelen dolgozatban nemcsak ilyen bizonyítási módszereket kívánunk tanítani, hanem — némi fanyar humorral vegyítve — Euler és kortársai gondolatainak, felfedezéseinek matematikatörténeti hátterét is ismertetjük.

Bevezetés, avagy a favágó keservei

Euler minden idők egyik legjobb matematikusa. Nagyon sok fontos tétele ismeretes. Van köztük egy geometriai tétel, amit azonban még a szakemberek is csak alig-alig ismernek. Jómagam is csak véletlenül találtam rá. Aztán pillanatok alatt megszerettem. Szinte minden héten felhasználom, amikor felsőéves egyetemi hallgatóknak tanítok alkalmazott matematikát. Különösen olyankor nagyon praktikus a tétel, amikor számítási munkáinkhoz felhasználhatunk olyan számítógépes szoftvert is, ami képes nemcsak numerikus számításokra, hanem formális algebrai műveletekre is.

Jómagam a DERIVE program 4.07-es változatát használom DOS környezetben. Ennek fejlettebb változatát az internetről könnyen letölthetjük. Alkalmasak ilyen célra a MAPLE, a MATHCAD, a MATHEMATICA, a MATLAB programcsomagok is. Ha netán az olvasónak van számítógépe, szüksége is van geometriai számításokra, de nem ismer a fent felsorolt programok közül egyet (sőt még hasonlót) sem, annak okítására hadd mondjak el egy anekdotát.

Az amerikai favágó (az ottani ,,székely") hallotta a kocsmában, hogy láncfűrésszel akár ötször annyi fát is ki lehet vágni naponta, mint fejszével. Keservesen megspórolt pénzén vett tehát egy láncfűrészt, de egy hét múlva méltatlankodva vitte vissza a boltba az alaposan megviselt eszközt mondván, hogy bármennyire is erölködik, még annyi fát sem tud vele kivágni, mint korábban a fejszéjével. ,,Bizonyára nem szakszerűen beállítva használta a gépet", mondta udvarias rosszallással az eladó, és berántotta a motort. ,,Hoppá!", mondta a favágó, ,,Mi ez a furcsa zaj?"

Nyájas Olvasó! A számítógép, amely képes akár egy ötször ötös determinánsot is egy pillantás ideje alatt kiszámolni (nemcsak numerikusan, hanem képletekkel is), az a mi láncfűrészünk. Euler tétele lesz a zsinór, amit meg kell ismernünk és vele be kell rántanunk a motorfűrészt, hogy a hosszas számolások favágó munkáját lényegesen megkönnyítsük.

Ki volt Euler, az ,,ezerszemű" gyengénlátó?

Nem más, mint a háromszáz évvel ezelőtti bázeli kálvinista plébános fia! *Paul Euler* plébános úr is okos ember lehetett abban az időben, amikor itt Magyarországon a kurucok kergették a labancokat (vagy éppen fordítva). Paul papa, amikor a bázeli egyetemen teológiát tanult, szorgosan látogatta a később messzi földön is híressé vált bázeli matematikuscsalád egyik tagja, *Jacob Bernoulli* előadásait, annak öccse, *Johann Bernoulli* pedig jó barátja volt. (Tulajdonképpen Paul és Johann együtt laktak Jacob házában egy ideig.)

Jacob az ,,Ars conjectandi", azaz a ,,találgatás tudománya" témában írt könyvében oldotta meg a tetszőleges rögzített $k = 3, 4, 5, ...$ esetén az $1^k + 2^k + ... + n^k$ összeg zárt képletbe formálásának kérdését. A $k = 1$ és $k = 2$ esetek már korábban is ismertek voltak; az előbbi az $n(n + 1)$ szorzat fele, az utóbbi a $(2n)(2n + 1)(2n + 2)$ szorzat 24-ede. A kérdéskörnek még teológiai jelentősége is van, mert $k = 1$, $n = 17$ esetén a *Jézus* feltámadása utáni ,,csodálatos halfogás" 153-as számát kapjuk, $n = 6 \cdot 6$, esetén pedig a *Jelenések könyve* alapján az ,,antikrisztus" számaként elhíresült 666-ot. Ez utóbbi szám már csak azért is érdekes, mert a 6-os számra épül, ami maga is $1 + 2 + 3$ alakú, és itt 3 maga is $1 + 2$ alakú, márpedig a híres latin mondás szerint ,,omne trinum perfectum", azaz ,,minden, ami hármas, tökéletes, három az Isten igaza". A *tökéletes számok* az aritmetikában — definíció szerint — olyan tulajdonságúak, hogy a náluk kisebb pozitív osztóik összegei. A hármas ebből a szempontból is tökéletes, sőt még a kétszerese, a hatos is az. Nekünk magyaroknak különösen kedves az ,,ötödik tökéletes szám", 33550336, amit Mátyás királyunk matematikaprofesszora, *Regiomontanus* talált meg 1461-ben. A tökéletes számokról még annyit, hogy minden eddig talált tökéletes szám olyan $1+2+3+...+n$ alakú szám, ahol n nemcsak, hogy prímszám, hanem kettes számrendszerben csupa 1-essel, méghozzá prímszám darab egyessel írható fel. (A prímszámok — definíció szerint — olyan 1-nél nagyobb egészek, melyek semmilyen náluk kisebb, de 1-nél nagyobb számmal nem oszthatók.) A kettes számrendszerben felírt $n = 11, 111, 11111, 1111111, 1111111111111$ számok tízes számrendszerben a következő tökéletes számokat adják: 6, 28, 496, 8128, 33550336. Ezek közül az első négy már a régi görögöknél is csodálat tárgya volt, az utolsó pedig — mint fent említettük — Regiomontanus (magyarosan: *Királyhegyi János*) jóvoltából félezer éves. A jelen írás címszereplője, Leonhard Euler is talált később két újabb tökélete számot, méghozzá azokat, amelyeket előállító n számok kettes számrendszerben 17 és 19 egyessel írandók le. Euler tökéletes számai tehát olyan $1 + 2 + ... + n$ alakú számok, ahol $n = 2^{6+6+6\pm1} - 1$. Azt is Euler bizonyította, hogy egy páros tökéletes szám mindig $1+2+...+2^m-1$ alakú, ahol m egész és 2^m-1 prím. A páratlan tökéletes számokról pedig ő sem tudott semmit mondani, még azt se, hogy léteznek egyáltalán. Most az évezred legvégén is csak annyit tudunk, ha létezik egyáltalán páratlan tökéletes szám, akkor annak iszonyatosan nagynak kell lennie. Egyszer maga Descartes — akiről majd később részletesebben lesz szó — azt hitte, hogy sikerült páratlan tökéletes számot találnia. Vette ugyanis a $(11 \cdot 2002 - 1) \cdot 3003 \cdot 3003$ szép szorzatot, és mivel ennek pontosan annyi osztóját találta, melyek összege megegyezik a tekintett szorzattal, azt gondolta, megfogott egy páratlan tökéletes számot. De elnézte a számolást, hiszen a tekintett szorzatnak 19 is prímtényezője, és a 19-et és annak többszöröseit kifelejtette az osztók közül.

A két legkisebb tökéletes szám, a 6-os és a 28-as is fontos a teológiában a fentemlített $153 = 3^2 \cdot 17$ és $666 = 2 \cdot 3^2 \cdot 37$ mellett. A 6-os tökéletességét az is mutatja, hogy a Jóisten hat nap alatt teremtette a világot. A 28-as szám pedig azon éjszakák száma — napnyugtától számítva az éjszakát — amíg a hold látható. A huszonnyolcadik éjszakán aztán már csak napkelte előtt lehet megpillantani a holdat keleti irányban, majd vagy másfél, vagy két és fél nap múlva nyugaton jelenik meg újra az ,,új” hold. A hold egyes fázisai — újhold, első negyed, telihold, utolsó negyed, a hold eltűnése — között így 6–6 nem holdfázisos éjszaka telik el *Máté evangéliuma* szerint Jézus nemzetségtáblája is hasonló rend szerint épül fel. A teremtéstől — a nagy újholdtól — Dávid királyig — a nagy teliholdig — 14 nemzedék a 14 napnak megfelelően, Dávidtól a babiloni fogságig — ami a hold eltűnésének felel meg — újra 14 nemzedék, majd Jézusig — az új nagy teliholdig — újra 14 nemzedék. Jézus halála — a megváltás — teliholdkor — a hónap 14. napján — következett be, ami pénteki nap volt — a hét 6. napja —, a feltámadás pedig harmadnapra, a hét első napjára — vasárnapra — következett be.

Az $1+2+...+n$ alakú, úgynevezett ,,háromszögszámok” teológiai kapcsolata már csak azért sem elvetendő gondolat, mert nemcsak Paul Euler, hanem tanára, Jacob Bernoulli is kezdetben teológiát tanult. Igazából Királyhegyi is kinevezett püspök volt! Neki csak azért nem sikerült $n = 2^{6+6\pm1} - 1$ mindegyikére az n-edik háromszögszámként nemcsak egy, hanem két új tökéletes számot is találni, mert $2^{11} - 1 = 2047$ nem prímszám, hiszen $2047 = 23 \cdot 89$, ezért a 2047. háromszögszám osztóinak összege a 23 és a 89 többszörösei miatt nagyobb lesz, mint maga a 2047. háromszögszám.

Jacob Bernoulli eredményeit tárgyalva ne felejtkezzünk el a $k = 2$ esetről sem az $1^k + 2^k + ... + n^k$ összegnél. Az egyik legszebb példa: $1^2 + 2^2 + ... + 24^2 = 4900 = 70^2$.

Rakjunk le egyforma ágyúgolyókat vízszintesen egy 24-szer 24-es négyzetbe úgy, hogy a golyók egymással északról, délről, keletről, nyugatról érintkezzenek. A keletkezett 23-szor 23 gödörbe újra rakjunk golyókat, és ezt folytassuk a felsőbb rétegebe is. Összesen tehát 4900 golyót tudunk így gúlába rakni. Az n réteget tartalmazó kupacot befoglaló négyoldalú gúla térfogatát könnyen kiszámíthatjuk. Már négy évszázada *Kepler* úgy sejtette, hogy ha a lehető legsűrűbben akarjuk elhelyezni a térben a golyókat, akkor az elmondott módszernél nincs jobb. Ezt azonban — teljes precizitással és elfogadhatóan egyszerűen — mindmáig senkinek sem sikerült bebizonyítani. (A zseniális Keplerről itt most csak annyit, hogy karrierjét csillagjóslással és mestere kutatási eredményeinek eltolvajlásával kezdte, továbbá a bolond *Rudolf* királyunk még inkább elbolondításával, aztán nagyszabású pereskedései között azt is komolyan bizonyítania kellett a törvény előtt, hogy édesanyja nem igazi boszorkány (akit be is börtönöztek ezzel a váddal).

Az azonban nem volt szép dolog *Madách*tól, hogy Keplernét ledér nőként tette meg ősanyánknak, Évának a *Tragédiá*ban.)

Borbála asszony ugyan nem volt jó felesége Keplernek, meg is őrült, és hamar meg is halt, de hagyott legalább némi vagyonkát a gyermekeire. Kepler később újra nősült, most már nagy körültekintéssel megválasztva a menyasszonyt, de másodszorra sem volt túl sok szerencséje.

Maradjunk még egy kicsit Kepler 4900 ágyúgolyójánál, melyek 24 rétegben vannak gúlába rakva. Le lehet-e szedni a rétegeket egészben a gúláról úgy, hogy a rétegnégyzetekből éppen egy 70-szer 70-es négyzetet rakjunk ki? Ezt *Gardner*, a híres matematikus-rejtvénykészítő kérdezgette 1966-tól kezdődően. Rendkívül nehéznek bizonyult a feladat! Természetesen senki sem tudott előállni a megoldással, pedig nagyon sokan próbálkoztak. Aztán 1978-ban *Mullin* bebizonyitotta — nagyon nehéz számolások után — hogy nem lehet a kívánalmaknak megfelelően lebontani a gúlát.

Nyolc évvel ezelőtt magam is megpróbálkoztam a bizonyítás leegyszerűsítésével. Bevallom, nem sikerült. Azt azonban észrevettem, hogy ha a rétegeket nem egy 70-szer 70-es négyzetbe, hanem egy 71-szer 71-esbe kell raknunk, akkor meg lehet oldani a feladatot.

A $1^k + 2^k + ... + n^k$ összegről a $k = 3$ esetben csak megemlítjük, hogy Jacob Bernoulli eredményei szerint ez az összeg éppen a n-edik háromszögszám négyzete. Ez a fentemlített ,,teológiai” számoknak meg a szerencseszámként is ismeretes 6. háromszögszámnak, a $21 = 3 \cdot 7$-nek is külön érdekességet ad, hiszen

$$1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + ... + 6 \cdot 6 \cdot 6 = 3^2 \cdot 7^2$$

$$1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + ... + 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2^4 \cdot 7^2$$

$$1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + ... + 17 \cdot 17 \cdot 17 = 153^2 = 3^4 \cdot 17^2$$

$$1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + ... + (6 \cdot 6) \cdot (6 \cdot 6) \cdot (6 \cdot 6) = 666 \cdot 666$$

Jacob Bernoulli öccse, Johann — Paul Euler jóbarátja — kezdetben orvosnak készült, bár apja kereskedőnek szánta. Neki köszönhetjük a — tanítványáról elnevezett — *L'Hospital*-szabályt. (Ennek a szabálynak a segítségével nagyon jól közelíthetjük például két nagyon kicsi pozitív szám hányadosát, mint például az $(1 - \cos 2x)/x^2$ hányadost, oly módon, hogy a számlálót is és a nevezőt is néhányszor deriváljuk — mindegyiket ugyanannyiszor — amíg csak a a hányadosuk könnyen megbecsülhetővé nem válik. Példánk esetében a számláló második deriváltja $4 \cos 2x$, a nevezőé 2, így az eredeti hányados nagyon közel van 2-höz, hiszen $\cos 2x$ nagyon közel van 1-hez.

Paul Euler plébános úr nemcsak a tanárát és barátját választotta meg jól, hanem élete párját is. Felesége szintén régi bázeli tudóscsaládból származott. A jelen írásunk címszereplője 1707. április 15-én született és a Leonhard nevet kapta a keresztségben. Mivel a család tudásvágyban nem, de anyagiakban meglehetősen szűkölködött, az apa a fiát papnak szánta. Mivel nem esik messze az alma a fájától, és ifjúkorában maga Paul Euler is szeretettel foglalkozott matematikával Jacob Bernoulli irányítása mellett, nem meglepő, hogy az ifjú Leonhard is nagy szorgalommal látogatta Jacob öccsének — apja barátjának — Johannak az óráit. (Jacob már Leonhard születése előtt meghalt.) Johann Bernoulli hamar felismerte az ifjú Leonhard Euler kirobbanó tehetségét, és külön is foglalkozott vele. Leonhard jó barátja lett Johann Bernoulli két fiának, *Nicolaus*nak és *Daniel*nek is, akik szintén híres matematikusok lettek később. A Bernoulli család aztán rábeszélte Euler papát, hogy hadd ne menjen papnak Leonhard, aki azután annak rendje és módja szerint kiváló eredménnyel magiszteri tudományos fokozatot szerzett.

Ez már három évszázada is így volt: Miután a rendkívül tehetséges fiatalember kitűnő eredménnyel befejezi a tanulmányait, egyszerűen nem jut neki semmilyen állás. Tizenkilenc évesen sikertelenül pályázott meg egy tanári állást, mellékelve hangtani tárgyú disszertációját. Csakhamar elnyerte a párizsi akadémia elismerését is egy hajózással kapcsolatos probléma megoldásával egy pályázat keretében. Elismerés, szakmai siker volt tehát, de megélhetés nem. Az egészből az lett, hogy húszévesen felült egy rajnai hajóra, és a tengerre érve elvitorlázott Szentpétervárra, ahol barátai, a korábban odatelepült Daniel és Nikolaus várták. Ők eszközöltek ki az újonnan alapított akadémián egy meghívást az ifjú Eulernak. Mit tesz az egy nyomorgó zseninek, ha nem a *mathezis*, nem is a *physica*, hanem az élettan tudományában kell működnie?

Megélhetési gondjai nyilván folyamatosan voltak, de magánéleti gondjai nem nagyon, hiszen Euler 1741-ig ott is maradt a Szentpétervári Akadémián, és meg is nősült 26 éves korában. Felesége a festőakadémia igazgatójának leánya. (Később összesen tizenhárom gyermek születetett Eulerréknál.) Eulernek a munkája is közelebb került a matematikához. Az akkoriban iszonyatos méretűvé hatalmasodó Oroszország térképeinek kidolgozásán munkálkodott. Ráment fél szeme világa harmincegy éves korában. Aztán a politikai helyzet is elromlott Oroszországban, és ez — többek között — a tudomány művelhetőségének sem tett jót. Így 1741-ben Euler elfogadta a berlini akadémi ajánlatát, és az ottani akadémia matematikai osztályának vezetője lett 1766-ig.

Katalin cárnő akkor visszahívta Szentpétervárra. Az akkor 59 éves Euler munkalendülete azonban még teljesen töretlen, bár már megmaradt fél szemére is majdnem teljesen vak. Élete végéig, 1783-ig, rendkívül sok tudományos művet írt és diktált tanítványainak. A negyedévezreddel ezelőtti matematika minden fejezetében vannak rendkívül fontos, Eulertől származó eredmények. Annyi a Euler-tétel, hogy nagyon könnyű egyet — ha még oly fontos is — egy kis időre elfelejteni.

Euler olyannyira termékeny és zseniális volt, annyira észrevett mindent, ami akár nehezen észrevehető, akár nem lehetett nem észrevenni, hogy a vaksi tudóst „ezerszemű" mesternek nevezték. „Olvassák Eulert, ő a mesterünk mindenben," írta a francia *Laplace*, az Euler utáni tudósnemzedék egyik legkiválóbbja. (Laplace nemcsak kiváló tudós volt, hanem igazi jó köpönyegforgató politikusként is nevet szerzett. Egyszer, amikor az akadémia titkári székére a *Fourier* és a *Biot* nevek közül kellett választani, Laplace ezt nyilatkozta — feltehetően azért, hogy egyik jelölt pártjának a jóindulatát se veszítse el —: „Két szavazólapot töltöttem ki, az egyiket megsemmisítem, a másikat az urnába teszem; így magam sem tudom, kire szavaztam." Tán kiatalálta, Nyájas Olvasó — hiszen politikusról van szó —, hogy mindkét cédulán ugyanaz a név szerepelt?)

Mi az a rettenetes „determináns", és hogy a csudába végezzünk vele?

A jelen munka címszereplője egy olyan tétel, amely ötször ötös determinánsok kiszámítását igényli. Akinek papíron kézzel kell ilyen determinánsokat sűrűn kiszámolni, az még a háromszáz évvel ezelőtti bázeli plébános nejét is felemlegeti. De Euler munkássága óta eltelt egy negyed évezred, és egy újkiadású vaskos tudományos könyv árából már egészen jó számítógépet lehet venni. Azzal pedig ugyanolyan könnyedséggel lehet akár ötször ötös determinánsokat is számolni, amilyen könnyen el lehet osztani mondjuk kalkulátorral egy nyolcjegyű számot egy másik nyolcjegyűvel, vagy ki lehet számítani a 2 tizenkettedik gyökét (ez utóbbi a zenében fontos szám).

Ezer éve a pápát (a magyar királyság alapításában II. Szilveszter néven közreműködő), korábban matematikában (is) kiváló *Gerbert* (ejtsd: Zserber) barátot irigyei azzal vádolták, hogy az ördöggel cimborál, mert csak az ördög taníthatta meg arra, hogy akár tízezernél is nagyobb számot akár száznál is nagyobb számmal el tud osztani, miközben a magakészítette tologatós számológépét — az *zserberi abakusz*t — püföli. Majdnem négyszáz éve a fiatal *Pascal* adóhivatalnok apjának fogaskerekes számolómasinát szerkesztett. Fél évszázada *Neumann János* pedig azzal az ötlettel jött elő, hogy a gépzongorák kottájaként üzemelő lyukszalagokkal nemcsak adatokat, hanem bonyolult számítási utasításokat is lehet adni egy gépnek, aminek ha ideje nem is, de a türelme végtelen a favágó számolgatásokhoz.

De mi az a determináns, és hogyan kell kiszámolni? Tetszőleges pozitív n-re van értelme n-edrend– determinánsról beszélni. Adva van n-szer n szám vagy képlet, ezeket elrendezzük n darab sorban egymás alá, minden sorba pontosan n darab számot vagy képletet rakva. Az első sort jelölje mondjuk az A szimbólum, a másodikat a B szimbólum, stb., az utolsó sort pedig mondjuk a Z szimbólum. Az oszlopat jelöljék ugyanúgy az A, B, ..., Z szimbólumok. Egy tetszőleges i szimbólum sorának és j szimbólum oszlopának kereszteződésében álló számot vagy képletet az ij kettős szimbólummal jelöljük. Nevezetesen a második sor első eleme így a BA szimbólum lesz, az utolsó sor utolsó eleme pedig a ZZ szimbólum. Most az egész táblázat *determinánsa* definíció szerint egyetlen szám vagy képlet lesz, ami a táblázatban szereplő számok vagy képletek egymással való összeszorzásával és a szorzatok előjeles összeadásával keletkezik.

Ha $n = 1$, akkor a determináns definíció szerint maga az egyetlen szám vagy szimbólum, ami ott van, azaz $[AA]$ determinánsa AA. Ha $n = 2$, akkor definició szerint $\left[\begin{smallmatrix}AA & AB\\ BA & BB\end{smallmatrix}\right]$ determinánsa az $AA \cdot BB - AB \cdot BA$ képlet. Nagyobb n-re pedig úgy definiáljuk a determináns értékét, hogy először leírjuk az

$$(-1)^k \cdot AA \cdot BB \cdot \ldots \cdot ZZ$$

szorzatot a $k = 0$ értékadással, aztán hozzádjuk azt a hasonlóan képzett szorzatot, amit úgy kapunk, hogy a szorzótényező kétbetűs szimbólumok közül kettőt kiválasztunk, azoknak a második elemét egymással felcseréljük, továbbá k értékét eggyel növeljük.

Ezután egy harmadik tag is következik, amit ugyanúgy képezünk. És így tovább mindaddig, amíg az összes lehetséges szorzatot nem képeztük.

Ettől a ponttól kezdve a jelen írás felhasználja a számítógép aprólékos munkáját. Példának okáért a kompjuteremmel kiszámíttattam a 3-adrendű, a 4-edrendű, és az 5-ötrendű determinánsokat.

Ezek az alábbi három képletben láthatók (az utóbbi kettő szorzattá alakítások után némileg rövidebb formában).

$$AA \cdot BB \cdot CC - AA \cdot BC \cdot CB - AB \cdot BA \cdot CC + AB \cdot BC \cdot CA + AC \cdot BA \cdot CB - AC \cdot BB \cdot CA$$

$$AA \cdot (BB \cdot (CC \cdot DD - CD \cdot DC) + BC \cdot (CD \cdot DB - CB \cdot DD) + BD \cdot (CB \cdot DC - CC \cdot DB)) - AB \cdot (BA \cdot (CC \cdot DD - CD \cdot DC) + BC \cdot (CD \cdot DA - CA \cdot DD) + BD \cdot (CA \cdot DC - CC \cdot DA)) + AC \cdot (BA \cdot (CB \cdot DD - CD \cdot DB) + BB \cdot (CD \cdot DA - CA \cdot DD) + BD \cdot (CA \cdot DB - CB \cdot DA)) - AD \cdot (BA \cdot (CB \cdot DC - CC \cdot DB) + BB \cdot (CC \cdot DA - CA \cdot DC) + BC \cdot (CA \cdot DB - CB \cdot DA))$$

$$AA \cdot (BB \cdot (CC \cdot (DD \cdot EE - DE \cdot ED) + CD \cdot (DE \cdot EC - DC \cdot EE) + CE \cdot (DC \cdot ED - DD \cdot EC)) - BC \cdot (CB \cdot (DD \cdot EE - DE \cdot ED) + CD \cdot (DE \cdot EB - DB \cdot EE) + CE \cdot (DB \cdot ED - DD \cdot EB)) + BD \cdot (CB \cdot (DC \cdot EE - DE \cdot EC) + CC \cdot (DE \cdot EB - DB \cdot EE) + CE \cdot (DB \cdot EC - DC \cdot EB)) - BE \cdot (CB \cdot (DC \cdot ED - DD \cdot EC) + CC \cdot (DD \cdot EB - DB \cdot ED) + CD \cdot (DB \cdot EC - DC \cdot EB))) - AB \cdot (BA \cdot (CC \cdot (DD \cdot EE - DE \cdot ED) + CD \cdot (DE \cdot EC - DC \cdot EE) + CE \cdot (DC \cdot ED - DD \cdot EC)) - BC \cdot (CA \cdot (DD \cdot EE - DE \cdot ED) + CD \cdot (DE \cdot EA - DA \cdot EE) + CE \cdot (DA \cdot ED - DD \cdot EA)) + BD \cdot (CA \cdot (DC \cdot EE - DE \cdot EC) + CC \cdot (DE \cdot EA - DA \cdot EE) + CE \cdot (DA \cdot EC - DC \cdot EA)) - BE \cdot (CA \cdot (DC \cdot ED - DD \cdot EC) + CC \cdot (DD \cdot EA - DA \cdot ED) + CD \cdot (DA \cdot EC - DC \cdot EA))) + AC \cdot (BA \cdot (CB \cdot (DD \cdot EE - DE \cdot ED) + CD \cdot (DE \cdot EB - DB \cdot EE) + CE \cdot (DB \cdot ED - DD \cdot EB)) - BB \cdot (CA \cdot (DD \cdot EE - DE \cdot ED) + CD \cdot (DE \cdot EA - DA \cdot EE) + CE \cdot (DA \cdot ED - DD \cdot EA)) + BD \cdot (CA \cdot (DB \cdot EE - DE \cdot EB) + CB \cdot (DE \cdot EA - DA \cdot EE) + CE \cdot (DA \cdot EB - DB \cdot EA)) - BE \cdot (CA \cdot (DB \cdot ED - DD \cdot EB) + CB \cdot (DD \cdot EA - DA \cdot ED) + CD \cdot (DA \cdot EB - DB \cdot EA))) - AD \cdot (BA \cdot (CB \cdot (DC \cdot EE - DE \cdot EC) + CC \cdot (DE \cdot EB - DB \cdot EE) + CE \cdot (DB \cdot EC - DC \cdot EB)) - BB \cdot (CA \cdot (DC \cdot EE - DE \cdot EC) + CC \cdot (DE \cdot EA - DA \cdot EE) + CE \cdot (DA \cdot EC - DC \cdot EA)) + BC \cdot (CA \cdot (DB \cdot EE - DE \cdot EB) + CB \cdot (DE \cdot EA - DA \cdot EE) + CE \cdot (DA \cdot EB - DB \cdot EA)) - BE \cdot (CA \cdot (DB \cdot EC - DC \cdot EB) + CB \cdot (DC \cdot EA - DA \cdot EC) + CC \cdot (DA \cdot EB - DB \cdot EA))) + AE \cdot (BA \cdot (CB \cdot (DC \cdot ED - DD \cdot EC) + CC \cdot (DD \cdot EB - DB \cdot ED) + CD \cdot (DB \cdot EC - DC \cdot EB)) - BB \cdot (CA \cdot (DC \cdot ED - DD \cdot EC) + CC \cdot (DD \cdot EA - DA \cdot ED) + CD \cdot (DA \cdot EC - DC \cdot EA)) + BC \cdot (CA \cdot (DB \cdot ED - DD \cdot EB) + CB \cdot (DD \cdot EA - DA \cdot ED) + CD \cdot (DA \cdot EB - DB \cdot EA)) - BD \cdot (CA \cdot (DB \cdot EC - DC \cdot EB) + CB \cdot (DC \cdot EA - DA \cdot EC) + CC \cdot (DA \cdot EB - DB \cdot EA)))$$

Nyájas Olvasó, sikerült teljesen elriasztanom? Mi lehet akkor, ha n értéke nem csak 5, hanem jóval nagyobb? Annyit azonban vigasztalásul hadd írjak ide, hogy ha konkrét számadatokkal kell dolgoznia a gépnek, akkor számtalan trükk bevethető a számítások legegyszerűsítése céljából. Erről könyveket írtak már, és az ilyen tudományokban nagy érdemei vannak *Kőnig Dénes* és *Egerváry Jenő* matematikusainknak századunk első feléből, akikről a *magyar módszer* elnevezés is meghonosodott a modern matematikában.

Mire jó ez a szörnyűséges determináns?

Nagyon sok mindenre jó a determináns fogalma és kiszámítása! Például, ha a $3x + 2y = 9, x + 4y = 8$ egyenletrendszert akarjuk megoldani, akkor az x értékét a $\left[\begin{smallmatrix}9 & 2\\ 8 & 4\end{smallmatrix}\right]$ táblázat (más néven *mátrix*) determinánsának és a $\left[\begin{smallmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{smallmatrix}\right]$ determinánsának hányadosaként is megkaphatjuk. Azaz $x = (9 \cdot 4 - 2 \cdot 8)/(3 \cdot 4 - 1 \cdot 2) = 2$. Több ismeretlenre, ún. lineáris egyenletrendszerre is működik valami hasonló.

Ez a nevezetes *Cramer*-szabály, amit az Eulerrel majdnem egyidős, szintén svájci matematikusról és filozófusról neveztek el. (Cramer találta fel azt a paradoxont is, miszerint egy n-edfokú egyenlettel megadható görbét nem mindig határoz meg $n(n+3)/2$ pont, de eggyel több pont már túlhatározza.)

Íme egy másik előfordulása a 2-odrendű determinánsnak: Ha közös nevezőre hozzuk és egymásból kivonjuk az a/b és c/d törteket, akkor a számlálóba $\left[\begin{smallmatrix}a & c\\ b & d\end{smallmatrix}\right]$ determinánsa, a nevezőbe pedig a cd szorzat kerül. Ha a, b, c, d pozitív számok, akkor a koordinátarendszerben az origó és a $(0, b)$, $(d, 0)$ pontok alkotta derékszögű háromszög területe éppen a fenti nevező fele, azaz $bd/2$, miközben az origó, az (a, b) és a (c, d) pontok háromszögének területe éppen a fenti számláló fele, azaz a $\left[\begin{smallmatrix}a & c\\ b & d\end{smallmatrix}\right]$ determináns abszolútértékének a fele. Ezért aztán az origó, az (a, b) és a (c, d) pontok pontosan akkor vannak egy egyenesen, ha $\left[\begin{smallmatrix}a & c\\ b & d\end{smallmatrix}\right]$ determinánsa nulla. Hasonló állítások magasabb dimenzióban is igazak. És ilyen jellegű lesz öt dimenzióban is Eulernak ebben a dolgozatban tárgyalt tétele.

Miért éppen távolságok négyzete?

Ha egy egyenes vonalon mozgunk, és arra vagyunk kíváncsiak, hogy két pont mennyire van közel vagy távol egymáshoz, nyilvánvalóan az egyenes menti távolságot számolunk. Ha előre haladunk, hozzádjuk a távolságot, ha visszafelé haladunk, levonjuk a távolságot abbó a számból, ami kifejezi, milyen messze jutottunk. Minél nagyobb távolságot tesz meg valaki, annál nagyobb az utazási hatékonysága. A két dolog természetes módon egyenes arányban áll egymással.

Az viszont már Euler korában is világos volt az okos embereknek, hogy a síkon (vagy a (föld)gömbe felszínén), és térben sokkal bonyolultabbak a távolsági viszonyok.

Ha Euler kiterített egy térképet egy hatalmas asztalra, és hogy romló szemével is jól láthassa a sötét szentpétervári estéken, odatett az asztal közepére egy talpas gyertyatartót, akkor megfigyelhette, hogy egy kétszer magasabb gyertyatartóba nemcsak 2, hanem 4 gyertyát kell tennie, ha a gyertyatartó tövénél ugyanolyan megvilágítást akar a térképen. Azt is tudták a szentpétervári pattantyúsok, hogy ha egy ágyúval mondjuk ötödével messzebb akarnak ellőni, akkor nemcsak 20 százalékkal több puskaport kell az ágyúcsőbe tömni, hanem majdnem másfélszer annyit. Azt pedig már Kepler is tudta másfél évszázaddal Euler előtt, hogy a bolygóknak a napra merőleges irányú sebessége nem a naptól mért távolsággal, hanem annak a négyzetével fordítottan arányos. Az is világos volt Euler körül minden térképkészítőnek, hogy ha megötszörözik mondjuk egy térkép léptékét, akkor nem ötször, hanem huszonötször annyi részletet lehet ráírni és rajzolni a térképre. Ha távcsővel szemléljük az eget, akkor a távoli dolgokat kétszer közelebb hozó távcsövekkel nem kétszer, hanem négyszer annyi csillagot tudunk megszámolni egy csillagképben, mint szabad szemmel. Ha a cárnő parancsára nemcsak 10 napi járásnyi távolságból szednek adót, hanem mondjuk 14 napi távolságból, akkor majdnem kétszerakkora summa jön össze, nemcsak 40 százalékkal több.

Összegezve: Ha nemcsak egy dimenzióban tekinjük a távolság hatását, akkor nemcsak egyszerűen a távolságot kell figyelembe vennünk, hanem inkább annak a négyzetét. A lejobb példa erre talán a két és félezer éves Pitagorasz-tétel. Ha két napig vándorlok Szibériában a hómezőkön, és egyik nap keletre megyek p versz távolágra (verszt = régi orosz mérföld, 1067 méter), a másik nap is keletre megyek q verszt távolságra és így a két nap alatt a kiindulási helytől r verszt távolságra kerültem, akkor nyilván $r = p + q$. Ha pedig a második napon nyugatra tartok, akkor $r = p - q$ (feltéve, hogy $p \geq q$). Ellenben ha a második napon akár északra, akár délre tartok, akkor pedig $r^2 = p^2 + q^2$. Azaz merőleges irányú hatásoknál nem a távolságokat, hanem azok négyzeteit kell figyelembe venni az összegzéseknél.

Kimondjuk már végre a címszereplő tételt?

Jelöljön $A, B, ...$ térbeli pontokat. Az i és j jel– pontok távolságának négyzetét pedig jelölje az ij jelölés. Felhívom a figyelmet arra, hogy itt ij nem feltétlenül számszerűsített, inkább csak a területmértéke például egy olzan (térbeli) négyzetnek, aminek két szomszédos csúcs i és j. Tekintsünk a háromdimenziós térben egy tetszőleges ABC háromszöget, és tekintsünk még egy szetszőleges D pontot a térben. Most képzeljünk el egy olyan speciális E pontot a térben, ami mind az A, B, C, D pontok mindegyikétől egyenlő távolságra van. Az E pontnak nyilván az ABC háromszög köré írható kör középpontjában a háromszög síkjára merőleges egyenesen kell lennie. Ha az A, B, C, D pontok egy síkban vannak, akkor nem biztos, hogy megválasztható ezen a merőleges egyenesen az E pont helyzete úgy, hogy ettől a D pont is ugyanolyan messze legyen, mint a az A, B, C pontok. De ilyen esetben az E pontot az ABC háromszög síkjától nagyon messze lévőnek vesszük fel, és elhanyagoljuk azt a pici hibát, amit azzal vétünk, hogy az E ponttól a D pont távolságát is az másik három pont távolságával egyezőnek vesszük. Mivel speciálisan vettük fel az E pontot, ezért most az AE, BE, CE, DE területek egyenlőek.

Euler úgynevezett *négypont-tétele* azt mondja ki, hogy az A, B, C, D, E pontokkal felírva ugyanúgy az ötödrendű determinánsot, mint ahogy azt fent tettük, *a determináns pontosan akkor lesz nulla, ha a D pont rajta van az ABC háromszög síján.*

Lássunk egy példát: Egy kocka egyik lapjának a középpontja legyen az E pont, a kocka élhossza legyen 2 egységnyi, a szemközti lap csúcsai pedig körbe legyenek A, B, C, D. Ekkor $AB = BC = CD = DA = 4$ $AE = BE = CE = DE = 6$ és $AC = BC = 8$. Természetesen ii és $ij = ji$ minden i, j pontra. Mindamellett a

$$\begin{matrix} 0 & 4 & 8 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 4 & 8 & 6 \\ 8 & 4 & 0 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 4 & 0 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 0 \end{matrix}$$

számnégyzet determinánsa valóban nulla. Aki nem hiszi számoljon utána, de berregtetheti a „számítógépes láncfűrészt" is. (Jómagam láncfűrésze DERIVE 4.07 típusú, és nem kell bele sem W95-ös, sem W98-as oktánszámú üzemanyag, sem különleges motoralkatrész, ugyanis mindenféle motorral működik, még roncstelepeken fillérekért kapható 286-os gépekkel is, hagyományos „DOS" üzemanyaggal.)

De mit jelent mindez sok dimenzióban?

Egyszer egy tanítványom szentül hitte, hogy matematika alapjai vannak az UFO-jelenségeknek. A marslakók igenis könnyedén utazhatnak a negyedik dimenzióban. Erre visszakérdeztem, hogy ha már ennyire jól ismeri a negyedik dimenziót, akkor mondja már meg, hogy hány éle van egy négydimenziós kockának. Mert én nagyon jó ismerem a negyedik és dimenziót, valamennyire látok is ott, de még egyetlen nagyszemű, csökevényes méretű zöld emberkét sem láttam arrafelé.

Nyájas olvasó, ha nem tudja Ön sem, hány éle van a négydimenziós kockának, akkor a jelen írás jelen szakaszát inkább hagyja ki, mert itt most azt kísérelem meg, hogy megmagyarázzam Euler tételének a jelentését nem kevesebb, mint 6 és 10 dimenzióban. Ráadásul kétféleképpen is.

Akárhogyan is az ötödrendű determinánsban olyan szorzatok vannak előjelesen összeadva, melyek mértékegysége a terület mértékegységének az ötödik hatványa, azaz nem négyzetcentiméter, vagy köbcentiméter, hanem „tizedhatványcentiméter". Másképpen szólva, tulajdonképpen a tízdimenziós térben van kétszer hatvan darab tízdimenziós téglatestünk, melyek kiterjedése kétdimenzióként az ij területekkel van megadva, és ezen területek szorzata a tízdimenziós téglatestek térfogata. (A téglatestek között szép számmal vannak teljesen laposak is, melyek térfogata nulla.) És az a tény, hogy a determináns nulla, azt jelenti, hogy a tízdimenziós téglatestek egyik hatvan darabos halmazának össztérfogata megegyezik a másik hatvan darabos össztérfogattal.

A másik magyarázat csak öt dimenzió kiterjedésű. Rendeljük hozzá az ötdimenziós koordinátarendszer tengelyeit egyesével az A, B, C, D, E pontokhoz, és mind az öt ponttal külön-külön tegyük a következőket: Az i ponthoz felveszünk egy i' jelű pontot az öt dimenzióban úgy, hogy annak a j koordinátatengely szerinti koordinátája éppen az ij jelöléssel jelölt terület. Euler tétele tulajdonképpen azt állítja, hogy a D pont pontosan akkor van rajt az eredeti háromdimenziós térben a az F síkon, ha a az ötdimenziós térben az origót és az öt darab i' ponttal összekötő öt darab egyenes mind merőleges egyazon, az origón átmenő egyenesre.

Nagyon nehéz bizonyítani Euler tételét, ugye?

Egyáltalán nem! Csak a fentemlített Pitagorasz-tételt és a *Descartes*-féle háromdimeziós koordinátarendszert kell felhasználnunk. Ha már újra szóba jött a több mint négy évszázada született francia filozófus és matematikus, megengedem magamnak hogy csak egyszerűen ,,Dékárt" néven emlegessem, csak így magyarosan. Fiatal korában katonaként hazánkban is harcolt, de hadseregét Érsekújvárnál megverték annak a Bethlen Gábornak a csapatai, akinek a képét most 2000-ben a 2000 forintoson láthatjuk. Akkortájt történt Dékárttal, hogy a Duna mellett többször álmot látott, melynek hatására felhagyott a katonáskodással, és inkább a tudománynak és filozófiának szentelte az életét. (Az álmaihoz nyilván az a rémálom is hozzájárult, hogy seregét a mieink elpáholták, parancsnokát elfogták.)

Descartes — mint nagy filozófus — mondta, hogy ,,Gondolkodom, tehát vagyok." Egyik doktoranduszom erre alapozta az egyik mikroszoft-csúfoló paródiaprogramját. A vindóz-ablakban megjelenik Descartes képe, mintha ma is élne, mozog a szája, és magyarul — de természetesen franciás akcentussal — mielőtt megmerevedne az arc, kimondja a Windows filozófiáját: ,,Gondolkodom, tehát fagyok."

Komolyra fordítva a szót: Tekintsük a térbeli xyz koordinátarendszert. Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy a ABC háromszög síkja a $z = 0$ egyenletű sík, a C pont a x-tengelyen van, a D pont a z-tengelyen van, Az A, B, C pontok x-koordinátáját jelölje rendre a, b, c Az A, B pontok y-koordinátáját pedig jelölje a, b, respectively. A C pont y-koordinátája és z-koordináták mind nullával egyenlők. A D pont esetében az x-koordináta 0, az y-koordináta is 0, z-koordinátát pedig jelölje d. Most a Pitagorasz-tétel miatt $AD = a^2 + \alpha^2 + d^2$, $BD = b^2 + \beta^2 + d^2$, $CD = c^2 + \gamma^2 + d^2$, $AB = (a-b)^2 + (\alpha-\beta)^2$, $AC = (a-c)^2 + \alpha^2$, $BC = (b-c)^2 + \beta^2$, Mindezekből kiszámítva az Euler-tételbeli determinánsot azt kapjuk, hogy a determináns értéke:

$$8d^2((a-c)\beta - (b-c)\alpha)^2 AE^2.$$

Itt $(a-c)\beta - (b-c)\alpha$ nem lehet 0, mert ez azt jelentené, hogy az ABC háromszögben az A és C pontokat összekötö egyenes iránytangense megegyezne a B és C pontokat összekötö egyenes iránytangensével. Tehát a determináns akkor és csak akkor nulla, ha $d = 0$. Éppen ezt állítja Euler tétele!

Most elkezdjük a láncfűrésszel az erdőirtást!

A láncfűrész bemelegítésére bizonyítsuk be a Heron-képletet. Adott a síkon egy tetszőleges háromszög. Ha a kerülete $2s$, két oldala pedig a és b, akkor a Heron-képlet szerint a háromszög területének négyzete

$$s(s-a)(s-b)(a+b-s).$$

Az a és b oldalak közötti háromszög-csúcsot jelölje C, az a oldallal szemben legyen az A csúcs, a b oldallal szemben legyen az B csúcs, a D pont pedig legyen a C csúcsból induló magasságvonal talppontja. Mármost a háromszög területe négyzetének négyszerese nyilván $AB \cdot CD$. Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $s = a + b - 1$. Most a Pitagorasz-tétel miatt $AD = b^2 - CD$, $BD = a^2 - CD$. Tudjuk továbbá, hogy $AB = (2s - a - b)^2 = (a + b - 2)^2$, $AC = b^2$, $BC = a^2$. Mivel most a D pont az ABC háromszög síkján van, az Euler-tételbeli determináns értéke nulla. Kifejezve ebből az egyenletből CD értékét, és abból képezve az $AB \cdot CD$ szorzatot, és azt szorzattá bontva azt kapjuk, hogy

$$4(a-1)(b-1)(a+b-1).$$

Ennek negyede — mivel $s = 1$ — valóban

$$s(s-a)(s-b)(a+b-s).$$

Második gyakorlatunk az lesz, hogy megnézzük, milyen összefüggés áll fenn az r sugarú körbe írt a, b, c oldalú háromszög oldalai és kör sugara között. Az A, B, C pontokat ugyanúgy vesszük fel, mint az előbb. A kör középpontja lesz a D pont. Most $AB = c^2$, $AC = b^2$, $BC = a^2$, $AD = BD = CD = r^2$. Abból, hogy az Euler-tételbeli determináns nulla, azt kapjuk, hogy

$$a^2b^2c^2 = r^2((a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^2)).$$

Ebbe az egyenletbe c^2 helyére az $a^2 + b^2$ képletet helyettesítve azt kapjuk, hogy $c = 2r$, és fordítva, c helyett a $2r$ képletet behelyettesítve azt kapjuk, hogy $c^2 = a^2 + b^2$. Mindez azt jelenti, hogy az Euler-tételnek speciális esete a Pitagorasz-tétel.

Jelölje az A csúcsnál lévő szöget α. Most nem megváltoztatva ezt a szöget, a fenti képletben c értékét válasszuk 1-nek, b értékét pedig $2r$-nek. Ekkor nyilván $a = 2c\cos\alpha$). Mindezt beírva a képletbe

Felhasznált irodalom:

Gévay Gábor: 200 éve halt meg Leonhard Euler, Természet Világa, 1983.

Sain Márton: Matematikatörténeti ABC, Tankönyvkiadó, 1974.