Kiszámítandó a következő függvények határértéke 1-nél, illetve megállapítandó, ha nincs határérték. Az a és b paraméterek valós számok.

$$\frac{x^3+x+1}{x^3+x+2} \qquad \frac{x^3-x+1}{x^3+x-2}$$
$$\frac{x^{666}-1}{x-1} \qquad \frac{x^{69}-1}{1-x^{96}}$$
$$\frac{a}{x-1}+\frac{b}{1-x^3} \qquad (x-a)\left[\frac{1}{a-x}\right]$$

(Itt az utolsó képletben a szögletes szárójel egész részt jelöl.)

Egyrészt $\frac{x^3+x+1}{x^3+x+2}$ esetében a számláló 3-hoz, a nevező 4-hez tart, tehát a határérték $\frac{3}{4}$. Másrészt $\frac{x^3-x+1}{x^3+x-2}$ esetében a számláló 1-hez, a nevező 0-hoz tart, tehát nincs határérték.

$$\frac{x^{666}-1}{x-1}$$

esetében egyszerűsíthetünk, és az lesz az eredmény, hogy

$$x^{665}+x^{664}+...+x+1$$

aminek a határértéke: 666.

Az előző feladathoz hasonlóan

$$\frac{x^{69}-1}{1-x^{96}}=\frac{x^{69}-1}{x-1}\cdot(-1)\cdot\frac{1-x}{1-x^{96}}$$

határértéke:

$$69\cdot(-1)\cdot\frac{1}{96}=\frac{-23}{32}=-0.718\,75$$

$$\begin{aligned}\frac{a}{x-1}+\frac{b}{1-x^3} &= \frac{a(1+x+x^2)}{(x-1)\,(1+x+x^2)}+\frac{b}{(1-x)(1+x+x^2)}\\ &= \frac{a(1+x+x^2)-b}{(x-1)\,(1+x+x^2)}\end{aligned}$$

Itt a számláló határértéke: $3a-b$, a nevező határértéke 0. Tehát az eredeti határérték nem létezik, ha $b\neq 3a$. Másrészt ha $b=3a$, akkor

$$\frac{a(1+x+x^2)-b}{(x-1)\,(1+x+x^2)}=\frac{a\left(1+x+x^2-3\right)}{(x-1)\,(1+x+x^2)}=\frac{a(x-1)(x+2)}{(x-1)(1+x+x^2)}=\frac{a(x+2)}{1+x+x^2}$$

Most a nevező határértéke 3, a számlálóé pedig $3a$. Összefoglalva: az eredeti függvénynek csak akkor van határértéke 1-nél, ha $b=3a$, és ekkor a limesz: a.

Ha $a \neq 1$, akkor $a - x$ határértéke egy nemnulla szám, és így

$$(x-a)\left[\frac{1}{a-x}\right]$$

határértéke:

$$(1-a)\left[\frac{1}{a-1}\right]$$

Ha $a > 2$, akkor ez a szám 0, ha $a = 2$, akkor a határérték -1, ha $2 > a > 1$, akkor a hatérérték egy negatív szám, és ha $a < 1$, akkor is egy negatív szám a határérték. Például $\frac{1}{2} < a \leq \frac{2}{3}$ esetén a határérték: $3a - 3$.

Ha pedig $a = 1$, akkor $k = 2, 3, \ldots$ és $1 - \frac{1}{k} \leq x < 1 - \frac{1}{k+1}$ esetén

$$(x-1)\left[\frac{1}{1-x}\right] = k(x-1)$$

és itt

$$\frac{-1}{k} \leq x - 1 < \frac{-1}{k+1}$$

A rendőrszabály miatt azt kapjuk, hogy az 1-nél kisebb x-ekre értelmezett határérték: -1. Másrészt $k = 2, 3, \ldots$ és $1 + \frac{1}{k+1} < x \leq 1 + \frac{1}{k}$ esetén

$$(x-1)\left[\frac{1}{1-x}\right] = -k(x-1)$$

és itt

$$\frac{1}{k+1} < x - 1 \leq \frac{1}{k}$$

A rendőrszabállyal most is megkapjuk, hogy az 1-nél nagyobb x-ekre értelmezett határérték: -1. Tehát

$$\lim_{x\to 1}\left((x-1)\left[\frac{1}{1-x}\right]\right) = -1.$$