Gyakorlatok Gomory módszerére

Hujter Mihály

Minimalizáljuk a nemnegatív egész x_1 értékét, ha x_2 is nemnegatív egész, és fennáll $5x_1 + 4x_2 \geq 22$ és $4x_1 + 8x_2 \leq 33$.

Először felírjuk a relaxált lineáris programozási feladatot, majd megoldjuk duál szimlex módszerrel:

$$\begin{aligned} x_1 &\to \min \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ 5x_1 + 4x_2 &\geq 22 \\ 4x_1 + 8x_2 &\leq 33 \end{aligned}$$

0	-1	0
0	-1	0
0	0	-1
-22	-5	(-4)
33	4	8

0	-1	0
0	-1	0
$\frac{11}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{-1}{4}$
0	0	-1
-11	(-6)	2

$\frac{11}{6}$	$\frac{-1}{6}$	$\frac{-1}{3}$
$\frac{11}{6}$	$\frac{-1}{6}$	$\frac{-1}{3}$
$\frac{77}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{6}$
0	0	-1
0	-1	0

Látható, hogy a relaxált feladat megoldása: $x_1 = \frac{11}{6}$, $x_2 = \frac{77}{24}$. A legfelső sorból ezt a Gomory-vágást olvassuk ki:

$$\frac{1}{6} \leq \frac{1}{6}x_4 + \frac{1}{3}x_3$$

ahol $x_3 = 5x_1 + 4x_2 - 22$ és $x_4 = 33 - 4x_1 - 8x_2$. Itt a Gomory-vágás eltérésváltozója, azaz

$$x_5 = \frac{1}{6}x_4 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{6}$$

is nemnegatív egész szám Ha a Gomory-vágást kifejezzük x_1-re és x_2-re vonatkoztatva:

$$\frac{1}{6} \leq \frac{1}{6}(33 - 4x_1 - 8x_2) + \frac{1}{3}(5x_1 + 4x_2 - 22)$$

Egyébként átrendezés után ez nem más, mint $2 \leq x_1$.

Hozzáírjuk a Gomory-vágást a duál szimplex tablóhoz:

$\frac{11}{6}$	$\frac{-1}{6}$	$\frac{-1}{3}$
$\frac{11}{6}$	$\frac{-1}{6}$	$\frac{-1}{3}$
$\frac{77}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{6}$
0	0	-1
0	-1	0
$\frac{-1}{6}$	$\frac{-1}{6}$	$\frac{-1}{3}$

Folytatjuk a duál szimlex módszert:

$\frac{11}{6}$	$\frac{-1}{6}$	$\frac{-1}{3}$
$\frac{11}{6}$	$\frac{-1}{6}$	$\frac{-1}{3}$
$\frac{77}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{6}$
0	0	-1
0	-1	0
$\frac{-1}{6}$	$(\frac{-1}{6})$	$\frac{-1}{3}$

2	-1	0
2	-1	0
3	$\frac{5}{4}$	$\frac{-1}{4}$
0	0	-1
1	-6	2
0	-1	0

A végeredmény tehát: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Ha a grafikusan is értelmezni akarjuk a fenti algoritmust, akkor figyeljuk meg, hogy az első lépésben az origóból kiindulva az $x_1 = 0$ és $5x_1 + 4x_2 = 22$ egyenesek metszéspontját határoztuk meg, a második lépésben az $5x_1+4x_2 = 22$ és $4x_1 + 8x_2 = 33$ metszéspontját. Erre kijött: $x_1 = \frac{11}{6}$, $x_2 = \frac{77}{24}$. A Gomory-vágás az

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{6}(33 - 4x_1 - 8x_2) + \frac{1}{3}(5x_1 + 4x_2 - 22)$$

egyenes mentén történt. Ez az utóbbi egyenes egyszerűen az $x_1 = 2$ egyenletű egyenes. Az utolsó lépés ezen új egyenes és az $5x_1 + 4x_2 = 22$ egyenesek metszéspontját adta ki: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Mivel itt mindkét koordináta egész, véget ért Gomory algoritmusa.

Második példánkban nemnegatív egész x_1, x_2, x_3 ismeretlenekre keressük az

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 13 \\ 12 &\leq 12 \end{aligned}$$

feltételek teljesülése esetén $x_1 + x_2 + x_3$ maximumát.

Először szimplex módszer segítségével megoldjuk a relaxált feladatot:

13	1	2	3	1	0
12	(2)	3	1	0	1
0	-1	-1	-1	0	0

7	0	$\frac{1}{2}$	$(\frac{5}{2})$	1	$\frac{-1}{2}$
6	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
6	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

$\frac{14}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{-1}{5}$
$\frac{23}{5}$	1	$\frac{7}{5}$	0	$\frac{-1}{5}$	$\frac{3}{5}$
$\frac{37}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

Ebből az utolsó szimplex tablóból kiolvashatjuk, hogy $x_1+x_2+x_3$ maximumának helye, mint 5-dimenziós x vektor, megegyezik

$$\frac{3}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_4 + \frac{2}{5}x_5$$

minimumának helyével, ahol

$$\begin{aligned} \frac{14}{5} &\geq \frac{1}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_4 - \frac{1}{5}x_5 \\ \frac{23}{5} &\geq \frac{7}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_4 + \frac{3}{5}x_5 \end{aligned}$$

és itt a felső egyenlőtlenség eltérésváltozója x_3, az alsóé x_1. Mindez a relaxált feladatra vonatkozik. Itt x_4 és x_5 is nemnegatív, hiszen

$$\begin{aligned} x_4 &= 13 - (x_1 + 2x_2 + 3x_3) \\ x_5 &= 12 - (2x_1 + 3x_2 + x_3) \end{aligned}$$

Mivel

$$\frac{37}{5} \geq x_1 + x_2 + x_3$$

és mivel $x_1 + x_2 + x_3$ egész szám, ezért egész x vektorra a maximuma a $x_1 + x_2 + x_3$ célfüggvénynek $\frac{2}{5}$-del kevesebb. Következésképpen egész x-re a következő Gomory-vágást nyerjük:

$$\frac{2}{5} \leq \frac{3}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_4 + \frac{2}{5}x_5$$

Most duál szimlex módszerrel folytatjuk az egészértékű feladat megoldását az x_2, x_4, x_5 ismeretlenekre vonatkozóan:

$\frac{-37}{5}$	$\frac{-3}{5}$	$\frac{-1}{5}$	$\frac{-2}{5}$
$\frac{23}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{-1}{5}$	$\frac{3}{5}$
0	-1	0	0
$\frac{14}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{-1}{5}$
0	0	-1	0
0	0	0	-1
$\frac{-2}{5}$	$(\frac{-3}{5})$	$\frac{-1}{5}$	$\frac{-2}{5}$

-7	-1	0	0
$\frac{11}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-1}{3}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{-5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{8}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$
0	0	-1	0
0	0	0	-1
0	-1	0	0

Most az x_1-nek megfelelő sorból jön ki a következő Gomory-vágás:

$$\frac{1}{3} \leq \frac{2}{3}x_6 + \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5$$

Ez alapján a duál szimplex tabló aljára írhatunk egy új sort, és indíthatjuk tovább a duál szimplex módszert:

-7	-1	0	0
$\frac{11}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-1}{3}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{-5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{8}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$
0	0	-1	0
0	0	0	-1
0	-1	0	0
$\frac{-1}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$(\frac{-1}{3})$

-7	-1	0	0
4	3	0	-1
0	-3	-1	2
3	1	1	-1
0	0	-1	0
1	2	2	-3
0	-1	0	0
0	0	0	-1

A végeredmény: $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$.

Nemnegatív egész x_1, x_2, x_3 ismeretlenekre minimalizálandó x_2 értéke feltéve, hogy

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 12 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 9 \end{aligned}$$

Először a kétfázisú szimplex módszer első fázisa:

12	(3)	3	4	0	1
9	1	3	0	1	0
-12	-3	-3	-4	0	0

4	1	1	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
5	0	2	$\frac{-4}{3}$	1	$\frac{-1}{3}$
0	0	0	0	0	1

Most indul a második fázis:

4	1	1	$\frac{4}{3}$	0
5	0	(2)	$\frac{-4}{3}$	1
0	0	-1	0	0

$\frac{3}{2}$	1	0	(2)	$\frac{-1}{2}$
$\frac{5}{2}$	0	1	$\frac{-2}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{-2}{3}$	$\frac{1}{2}$

$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{-1}{4}$
3	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$

A relaxált feladat optimális megoldásához érkeztünk: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = \frac{3}{4}$. Ugyanakkor az eredeti feladat feltételeinek és célfüggvényének egy átírását is kiolvashatjuk az utolsó szimplex tablóból:

$$
\begin{aligned}
x_1, x_2, x_3, x_4 &\in \{0, 1, 2, ...\} \\
\frac{3}{4} &= \frac{1}{2}x_1 + x_3 - \frac{1}{4}x_4 \\
3 &= \frac{1}{3}x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_4 \\
\left(\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4\right) &\to \min
\end{aligned}
$$

Most duál szimplex módszerrel, Gomory-vágással folytatjuk:

$$
\begin{array}{|c:cc|}
\hline
3 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\
\hline
0 & -1 & 0 \\
3 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\
\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \\
0 & 0 & -1 \\
\hline
\frac{-1}{4} & (\frac{-1}{2}) & \frac{-1}{4} \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{|c:cc|}
\hline
\frac{19}{6} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{6} \\
\hline
\frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\
\frac{17}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\
\frac{1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} \\
0 & 0 & -1 \\
\hline
0 & -1 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{|c:cc|}
\hline
\frac{19}{6} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{6} \\
\hline
\frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\
\frac{17}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\
\frac{1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} \\
0 & 0 & -1 \\
\hline
0 & -1 & 0 \\
\frac{-5}{6} & \frac{-2}{3} & (\frac{-1}{6}) \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{|c:cc|}
\hline
4 & 0 & -1 \\
\hline
-2 & (-4) & 3 \\
2 & 0 & 1 \\
3 & 3 & -3 \\
5 & 4 & -6 \\
\hline
0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -1 \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{|c:cc|}
\hline
4 & 0 & -1 \\
\hline
0 & -1 & 0 \\
2 & 0 & 1 \\
\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{-3}{4} \\
3 & 1 & -9 \\
\hline
\frac{1}{2} & \frac{-1}{4} & \frac{-3}{4} \\
0 & 0 & -1 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{|c:cc|}
\hline
4 & 0 & -1 \\
\hline
0 & -1 & 0 \\
2 & 0 & 1 \\
\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{-3}{4} \\
3 & 1 & -9 \\
\hline
\frac{1}{2} & \frac{-1}{4} & \frac{-3}{4} \\
0 & 0 & -1 \\
\frac{-1}{2} & (\frac{-1}{4}) & \frac{-3}{4} \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{|c:cc|}
\hline
4 & 0 & -1 \\
\hline
2 & -4 & 3 \\
2 & 0 & 1 \\
0 & 3 & -3 \\
1 & 4 & -12 \\
\hline
1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -1 \\
0 & -1 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

A végeredmény: $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$.