Gomory algoritmusa

Ez a kézirat a `http://www.math.bme.hu/~hujter/gomory.pdf` fájlban található.
(A hozzá tartozó színes ábrákért a `http://www.math.bme.hu/~hujter/gom.htm` helyre érdemes ellátogatni.)

Szeretnénk optimális megoldást keresni egy standard alakú lineáris programozási feladathoz — melyben az együtthatók mind egész számok — azzal a plusz igénnyel, hogy minden x_p ismeretlen értéke nemcsak nemnegatív legyen, hanem **egész szám** is. Ha az egész szám értékűséget elhagynánk, egy másik, az úgynevezett *relaxált* feladattal állnánk szemben. A célunkat úgy érjük el, hogy két lépést váltogatunk:
Első lépés: Megoldjuk annak rendje és módja szerint primál vagy duál szimplex módszerrel a relaxált lineáris programozási feladatot, de nem érjük be csak az optimális bázismegoldás felírásával, hanem még — amennyiben nem minden ismeretlen értéke lesz egész szám — az utolsó szimplex táblából kiolvassuk egy nem egész értékű x_j változó felírását $x_j = d_{j0} - \Sigma_{p \in K} d_{jp} x_p$ alakban, ahol K azon p indexek halmaza, mely indexek nincsenek benn a megkapott optimális bázis indexeinek halmazában.
Második lépés: Ha nem találtunk már az első lépésnél nem egész x_j változót, megállapítjuk, hogy végetért az algoritmusunk. Máskülönben pedig hozzáveszünk az eredeti feladathoz egy s_j-vel jelölt új nemnegatív egész értékű döntési változót, melyre kirójuk az új $s_j = -g_{j0} + \Sigma_{p \in K} g_{jp} x_p$ feltételt, ahol bármely $p \in \{0\} \cup K$ esetén a g_{jp} számot úgy értelmezzük, mint azt a nemnegatív és 1-nél kisebb számot, amit a d_{jp} számhoz kell adni, hogy az összeg egész szám legyen. Amennyiben erre a második lépésre már nem először kerül sor, akkor a korábbi s_j döntési változót a rá vonatkozó feltétellel együtt elfelejthetjük. Az így módosított relaxált feladattal visszatérünk az első lépésre.
Ezt a megoldási módszert az amerikai *Gomory* javasolta 1959-ben. (Gomory apja a magyar Gömöry volt.)
A módszerben csak az első lépés végrehajtása jelenthet nehézséget. Tulajdonképpen bármely szimplex algoritmus megfelel a célra. Bizonyos szempontból azonban az a praktikus, hogy a legelső alkalommal primál szimplex algoritmust végezzünk (ha kell kétfázisú kivitelben), aztán később mindig duál szimplex algoritmus következzen. De ha az elején a duál szimplex módszerrel megoldva kínálkozik egyszerűbbnek a relaxált feladathoz az optimális bázis megkeresésének feladata, akkor az elején is duál szimplex módszerrel dolgozhatunk.
Gomory algoritmusát egy **példa** révén szemléltetjük (mely példa Prékopa András egyik könyvéből származik): Nemnegatív egész x_1, x_2-re minimalizálandó: $5x_1 + 4x_2$, kielégítendő: $2x_1 + x_2 \geq 1$; $2x_1 + 5x_2 \geq 4$; $-x_1 + x_2 \geq 0$; $-x_1 - x_2 \geq -5$; $-x_1 - 2x_2 \geq -4$.
Mivel most a célfüggvény minimalizálásos alakjában minden együttható nemnegatív, a duál szimplex módszer kínálja magát a relaxált feladat megoldására. A kiindulási duál szimplex tábla — Szántai Tamásnak az *Az operációkutatás matematikai módszerei* című kézirata alapján — a következő:

0	−5	−4
0	−1	0
0	0	−1
−1	−2	−1
−4	−2	−5
0	1	−1
5	1	1
4	1	2

Mindig a lehető legfelső sorból választva a zárójellel megjelölt pivotelemet elvégezzük a duál szimplex módszert.

0	−5	−4
0	−1	0
0	0	−1
−1	(−2)	−1
−4	−2	−5
0	1	−1
5	1	1
4	1	2

$2^1/_2$	$-2^1/_2$	$-1^1/_2$
$^1/_2$	$-^1/_2$	$^1/_2$
0	0	−1
0	−1	0
−3	−1	(−4)
$-^1/_2$	$^1/_2$	$-1^1/_2$
$4^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$
$3^1/_2$	$^1/_2$	$1^1/_2$

$3^5/_8$	$-2^1/_8$	$-^3/_8$
$^1/_8$	$-^5/_8$	$^1/_8$
$^3/_4$	$^1/_4$	$-^1/_4$
0	−1	0
0	0	−1
$^5/_8$	$^7/_8$	$-^3/_8$
$4^1/_8$	$^3/_8$	$^1/_8$
$2^3/_8$	$^1/_8$	$^3/_8$

Itt most $x_1 = ^1/_8$ adódott a relaxált feladat optimális megoldásában. Kiolvashatjuk tehát, hogy $K = \{3, 4\}$, $j = 1$, $d_{1,0} = ^1/_8$, $d_{1,3} = -^5/_8$, $d_{1,4} = ^1/_8$. Tehát $d_{1,0}$-hoz $^7/_8$-ot, $d_{1,3}$-hoz $^5/_8$-ot, $d_{1,4}$-hez $^7/_8$-ot kell adni, hogy egész számot kapjunk, azaz $g_{1,0} = ^7/_8$, $g_{1,3} = ^5/_8$, $g_{1,4} = ^7/_8$. Az új feltételünk tehát ez: $0 \leq s_1 = -^7/_8 + ^5/_8 x_3 + ^7/_8 x_4$. Ezt hozzátoldhatjuk az utolsó duál szimplex táblához, majd kijelölhetjük a pivotelemet a duál szimplex módszer folytatásához, és végezhetjük a duál szimplex módszert, amíg véget nem ér:

$3^5/_8$	$-2^1/_8$	$-^3/_8$
$^1/_8$	$-^5/_8$	$^1/_8$
$^3/_4$	$^1/_4$	$-^1/_4$
0	−1	0
0	0	−1
$^5/_8$	$^7/_8$	$-^3/_8$
$4^1/_8$	$^3/_8$	$^1/_8$
$2^3/_8$	$^1/_8$	$^3/_8$
$-^7/_8$	$-^5/_8$	$-^7/_8$

$3^5/_8$	$-2^1/_8$	$-^3/_8$
$^1/_8$	$-^5/_8$	$^1/_8$
$^3/_4$	$^1/_4$	$-^1/_4$
0	−1	0
0	0	−1
$^5/_8$	$^7/_8$	$-^3/_8$
$4^1/_8$	$^3/_8$	$^1/_8$
$2^3/_8$	$^1/_8$	$^3/_8$
$-^7/_8$	$-^5/_8$	$(-^7/_8)$

4	$-1^6/_7$	$-^3/_7$
0	$-^5/_7$	$^1/_7$
1	$^3/_7$	$-^2/_7$
0	−1	0
1	$^5/_7$	$-1^1/_7$
1	$1^1/_7$	$-^3/_7$
4	$^2/_7$	$^1/_7$
2	$-^1/_7$	$^3/_7$
0	0	−1

Most már kiolvashatjuk a végeredményt: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 1, x_6 = 4, x_7 = 2, s_1 = 0$.

Egy *másik példa* esetében el sem tudjuk kezdeni duál szimplex módszerrel a feladat megoldását:
Nemnegatív egész x_1, x_2-re maximalizálandó x_2, ahol $3x_1 + 2x_2 \leq 6$ és $-3x_1 + 2x_2 \leq 0$.
Itt most *primál* szimplex módszerrel tudjuk megoldani a relaxált feladatot:

6	3	2	1	0
0	-3	(2)	0	1
0	0	-1	0	0

6	(6)	0	1	-1
0	$-1{}^1/_2$	1	0	${}^1/_2$
0	$-1{}^1/_2$	0	0	${}^1/_2$

1	1	0	${}^1/_6$	$-{}^1/_6$
$1{}^1/_2$	0	1	${}^1/_4$	${}^1/_4$
$1{}^1/_2$	0	0	${}^1/_4$	${}^1/_4$

Az utolsó — egyébként a relaxált feladatra nézve optimális — primál szimplex tábla egyszerűen átrendezhető egy — egyébként a relaxált feladatra nézve szintén optimális — duál szimplex táblává:

$-1{}^1/_2$	$-{}^1/_4$	$-{}^1/_4$
1	${}^1/_6$	$-{}^1/_6$
$1{}^1/_2$	${}^1/_4$	${}^1/_4$
0	-1	0
0	0	-1

Kiolvashatjuk: $x_2 = 1{}^1/_2 - ({}^1/_4 x_3 + {}^1/_4 x_4)$. Tehát most $K = \{3, 4\}$, $j = 2$, $d_{2,0} = 1{}^1/_2$, $d_{2,3} = {}^1/_4$, $d_{2,4} = {}^1/_4$. Következésképpen $g_{2,0} = {}^1/_2$, $g_{2,3} = {}^3/_4$, $g_{2,4} = {}^3/_4$, tehát a döntési változókra kirótt egészértékűségi követelmény révén nyerjük a következő extra feltételt: $0 \leq s_2 = -{}^1/_2 + {}^3/_4 x_3 + {}^3/_4 x_4$. Annak rendje és módja szerint ezt hozzáírhatjuk a fenti duál szimplex táblához megőrizve annak duál megengedettségét, de elrontva a primál megengedettséget:

$-1{}^1/_2$	$-{}^1/_4$	$-{}^1/_4$
1	${}^1/_6$	$-{}^1/_6$
$1{}^1/_2$	${}^1/_4$	${}^1/_4$
0	-1	0
0	0	-1
$-{}^1/_2$	$-{}^3/_4$	$-{}^3/_4$

Most pivotálnunk kell! A lexikografikus duál szimplex módszer pivotelemet kiválasztó szabálya szerint a középső alsó elem lesz a pivotelem. Mindjárt el is végezzük a pivotálást:

$-1{}^1/_2$	$-{}^1/_4$	$-{}^1/_4$
1	${}^1/_6$	$-{}^1/_6$
$1{}^1/_2$	${}^1/_4$	${}^1/_4$
0	-1	0
0	0	-1
$-{}^1/_2$	$(-{}^3/_4)$	$-{}^3/_4$

$-1{}^1/_3$	$-{}^1/_3$	0
${}^8/_9$	${}^2/_9$	$-{}^1/_3$
$1{}^1/_3$	${}^1/_3$	0
${}^2/_3$	$-{}^4/_3$	1
0	0	-1
0	-1	0

A legalsó sort most elfelejtjük, és helyére beírjuk az s_1-re vonatkozó sort, majd rögtön pivotálunk is:

$-1{}^1/_3$	$-{}^1/_3$	0
${}^8/_9$	${}^2/_9$	$-{}^1/_3$
$1{}^1/_3$	${}^1/_3$	0
${}^2/_3$	$-{}^4/_3$	1
0	0	-1
$-{}^1/_9$	$-{}^7/_9$	$-{}^1/_3$

$-1{}^1/_3$	$-{}^1/_3$	0
${}^8/_9$	${}^2/_9$	$-{}^1/_3$
$1{}^1/_3$	${}^1/_3$	0
${}^2/_3$	$-{}^4/_3$	1
0	0	-1
$-{}^1/_9$	$-{}^7/_9$	$(-{}^1/_3)$

$-1{}^1/_3$	$-{}^1/_3$	0
1	1	-1
$1{}^1/_3$	${}^1/_3$	0
${}^1/_3$	$-{}^1/_3$	3
${}^1/_3$	${}^7/_3$	-3
0	0	-1

Most az x_2 sorából származik az új feltétel:

$-1{}^1/_3$	$-{}^1/_3$	0
1	1	-1
$1{}^1/_3$	${}^1/_3$	0
${}^1/_3$	$-{}^1/_3$	3
${}^1/_3$	${}^7/_3$	-3
$-{}^2/_3$	$-{}^2/_3$	0

$-1{}^1/_3$	$-{}^1/_3$	0
1	1	-1
$1{}^1/_3$	${}^1/_3$	0
${}^1/_3$	$-{}^1/_3$	3
${}^1/_3$	${}^7/_3$	-3
$-{}^2/_3$	$(-{}^2/_3)$	0

-1	$-\frac{1}{2}$	0
0	$1\frac{1}{2}$	-1
1	$\frac{1}{2}$	0
4	$-5\frac{1}{2}$	3
-2	$3\frac{1}{2}$	(-3)
0	-1	0

-1	$-\frac{1}{2}$	0
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{2}$	0
2	-2	1
0	0	-1
0	-1	0

Most az x_1 sorából származik az új feltétel:

-1	$-\frac{1}{2}$	0
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{2}$	0
2	-2	1
0	0	-1
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$

-1	$-\frac{1}{2}$	0
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{2}$	0
2	-2	1
0	0	-1
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$(-\frac{1}{3})$

-1	$-\frac{1}{2}$	0
1	1	-1
1	$\frac{1}{2}$	0
1	-4	3
1	2	-3
0	0	1

Kiolvassuk a végeredményt: $\mathbf{x} = [1; 1; 1; 1]$.