**DIPLOMAMUNKA**

# Gráfszínezések a távolság figyelembe vételével


## Halász Veronika



**Témavezetők:**

| | |
|---|---|
| Dr. Tuza Zsolt | dr. Hujter Mihály |
| tudományos tanácsadó | egyetemi docens |
| MTA SZTAKI | BME Matematika Intézet, Differenciálegyenletek Tanszék |



**BME**
**2011**

# Tartalomjegyzék

# 1. Bevezetés

A dolgozatom a gráfszínezés egy az eredetinél szigorúbb változatáról szól. Ez a színezés figyelembe veszi az egyes csúcspárok távolságát, innen ered a „távolságot figyelembe vevő gráfszínezés” elnevezés. A 2. fejezetben ezt mutatom be néhány eddig publikált eredménnyel együtt. A témában speciális gráfosztályokra vonatkozó eredmények szerepelnek a következő két fejezetben: a 3. az elemi gráfokról, a 4. a hálógráfokról szól. Az 5. fejezet egyfajta kitekintés, egy újabb fogalom, az élív kerül bemutatásra. A 6., illetve a 7. fejezetben írom le a probléma általánosítását és az azzal kapcsolatban általam kitűzött feladatot. Ezt a feladatot több irányból is megpróbáltam megközelíteni, az ötletekről és próbálkozásokról a 9. és a 10. fejezetben írok. Többek között a fafelbontást is tanulmányoztam, mert jó eséllyel hasznos lehet. Erről a 10. fejezetben írok. A 9.1. és a 10.1. alfejezetben ismertetem is az eddigi eredményeimet, utána pedig azt, hogy milyen elképzeléseim vannak a folytatást illetően.

# 2. Eredmények az $L(d_1, d_2, d_3)-$színezés témaköréből

Az általam olvasott cikkek a 3 paraméterű, távolságot figyelembe vevő gráfszínezéssel foglalkoznak. Külön megvizsgálnak speciális gráfokat, és becsült értékeket adnak $(d_1, d_2, d_3)-$ színezési számukra. Először ezt a fogalmat fejtem ki részletesen, főként a [8]-ban leírtak alapján.

A kérdéskört az a gyakorlati probléma ihlette, hogy hogyan lehet az egyes rádióadókhoz úgy hozzárendelni a frekvenciákat, hogy minimális legyen az interferencia, illetve sehol se lépjen fel. A hálózatokat egy gráffal lehet modellezni. Minden adóhoz tartozik egy terület, ezeknek a gráfban megfelel egy-egy csúcs, amelyek pontosan akkor szomszédosak, ha a megfelelő területek azok. Gyakoriak a következő rendszerek: $n$-hosszú út $(P_n)$, $n-$hosszú kör $(C_n)$, a sík lefedése egy adott szabályos síkidommal, ahol a síkidom minden példányának egy gráfcsúcs felel meg. Ilyen esetben tipikus a háromszögekkel, négyzetekkel, illetve hatszögekkel való lefedés.

Most rátérhetünk a színezésre: A gráf egy jó színezésének tekintjük azt a függvényt, amely minden csúcshoz hozzárendel egy színt, s két csúcsnak csak akkor lehet azonos a színe, ha azok nem szomszédosak. A gráf egy jó színezéséhez szükséges színek minimális száma a gráf kromatikus száma. Az alábbiakban bevezetendő általánosabb feladatok megfogalmazása miatt célszerű, ha a színek helyett természetes számokat használunk. Ha minden csúcsnál előre rögzítünk egy listát, amelyen azok a számok szerepelnek, amelyek közül az adott csúcs színezésbeli száma kikerül, akkor listaszínezésről beszélünk. Egy gráf listaszínezési száma az a legkisebb természetes szám, amelyre igaz az, hogy ha minden csúcshoz adott egy legalább ilyen hosszú, különböző természetes számokból álló lista, akkor azokról a gráf kiszínezhető jól. A rádióadók problémája a fent definiált színezés általánosításával írható le. A gráf egy $k-$színezése egy olyan színezés, ahol ha két csúcs távolsága $i$, $i = (1, 2, 3)$, akkor a nekik megfelelő természetes számok különbsége legalább $d_1$, $d_2$, illetve $d_3$. Ez persze továbbfinomítható azzal, hogy a távolságokat nem 3-ig vesszük figyelembe, hanem nagyobbakra is. Sőt, ma már azzal is foglalkoznak, hogy a természetes számok helyett valós számokkal dolgoznak, ami az eredeti problémához közelebb is áll. A színezés egy speciális változata a rádiószínezés. Ebben az esetben adott egy összefüggő G gráf és egy $1 \leq k \leq diam(G)$ természetes szám, ahol $diam(G)$ a gráf átmérőjét (a legnagyobb előforduló távolság két gráfbeli csúcs között) jelöli. A gráf egy jó $k-$rádiószínezése egy olyan $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, ...\}$függvény, melyre $|c(u) - c(v)| \geq 1 + k - d(u, v)$ a gráf bármely két különböző, $u$ és $v$ csúcsára teljesül. Minden ilyen $G$ gráfra, $k$ egész számra, illetve $c$ $k-$rádiószínezésre $rc_k(c)$ jelöli a legnagyobb olyan számot, mely $G$ valamely csúcsához lett rendelve. A gráf $k-$rádió-kromatikus száma jelöli a $min\{rc_k(c)\}$ értéket. Ezt a fajta színezést $k = diam(G)$ esetén rádiószínezésnek is nevezzük. Sokszor félreértésre ad alapot, hogy vannak, akik a 0-t nem tekintik természetes számnak. Mindenesetre ez a színezés megengedi a 0 használatát.

Alapvető tulajdonságok: (A definíciókból adódnak)

*a*) Ha $H$ egy részgráfja $G$-nek, akkor $\lambda(H; d_1, d_2, d_3) \leq \lambda(G; d_1, d_2, d_3)$.

*b*) Minden $G$ gráfra és $d_1 \leq d_2 \leq d_3$ számra $\lambda(G; d_1, d_2) \leq \lambda(G; d_1, d_2, d_3)$.

*c*) Ha $\delta_i \leq d_i, (i = 1, 2, 3)$, akkor $\lambda(G; \delta_1, \delta_2, \delta_3) \leq \lambda(G; d_1, d_2, d_3)$.

*d*) $\lambda(G; dd_1, dd_2, dd_3) = d \cdot \lambda(G; d_1, d_2, d_3)$ minden $d > 0$ szám esetén teljesül.

### Speciálisan az $L(3, 2, 1)-$színezésre vonatkozó állítások és tételek

**Lemma:** Ha $f$ egy $k - L(3, 2, 1)-$színezése $G$-nek, akkor az $f' : V(G) \rightarrow \{0, ..., k\}$, $f'(v) = k - f(v)$ függvény is egy jó $k - L(3, 2, 1)-$színezése $G$-nek.

**Lemma:** Egy $S_n = \{v\} + \overline{K_n}$ csillag ($n+1$ pontból áll, egyik pontja minden másikkal szomszédos, azok azonban csak vele) esetén $\lambda(S_n; 3, 2, 1) = 2n + 1$. Sőt, ha $f$ egy $(2n + 1) - L(3, 2, 1)-$színezése $S_n$-nek, akkor $f(v) = 0$ vagy $2n + 1$.

**Következmény:** Minden $G$ gráfra $\lambda(G; 3, 2, 1) \geq 2\Delta + 1$. Sőt, ha $\lambda(G; 3, 2, 1) = 2\Delta + 1$, és $f$ egy $(2\Delta + 1) - L(3, 2, 1)-$színezése $G$-nek, akkor minden maximális fokszámú $v \in V(G)$ csúcs esetén $f(v) \in \{0, 2\Delta + 1\}$.

**Következmény:** Ha egy $G$ gráfban léteznek $v_1, v_2, v_3 \in V(G)$ csúcsok, melyek fokszáma $\Delta$, és $d(v_i, v_j) \leq 3$ minden $i$, $j$ esetén, akkor $\lambda(G;\, 3, 2, 1) \geq 2\Delta + 2$.

**Lemma:** Ha $\lambda(G;\, 3, 2, 1) = 2\Delta + 2$, és $f$ egy $(2\Delta + 2) - L(3, 2, 1)-$színezése $G$-nek, akkor minden maximális fokszámú $v \in V(G)$ csúcs esetén $f(v) \in \{0, 1, 3, ..., \, 2\Delta - 1, \, 2\Delta + 1, \, 2\Delta + 2\}$.

**Következmény:** Ha $\lambda(G;\, 3, 2, 1) = 2\Delta + 2$, és léteznek $v, v_1, v_2, v_3 \in V(G)$ csúcsok, melyek fokszáma $\Delta$, és $vv_1, vv_2, vv_3 \in E(G)$, akkor minden olyan $f$ függvényre, mely $G$-nek jó $L(3, 2, 1)$-színezése, $f(v) \in \{0, 2\Delta + 2\}$ teljesül.

**Lemma:** Ha egy $G$ gráf átmérője $k$, $1 \leq k \leq 3$, akkor $\lambda(G;\, 3, 2, 1) \geq (4 - k) \cdot (|V(G)| - 1)$.

**Tétel:** $\lambda(Petersen - gráf;\, 3, 2, 1) = 18 = 2(|V(Petersen - gráf)| - 1)$.

## 2.1. Felső korlátok $\lambda(G;\, 3, 2, 1)$-re

$\lambda(G)$-re van $\Delta$-ban négyzetes felső korlát. Nevezetesen, először azt sikerült bebizonyítani, hogy $\lambda(G) \leq \Delta^2 + 2\Delta$, majd később sikerült a korlátot lejjebb szorítani $\Delta^2 + \Delta$-ra. Ezen bizonyított korlát mellett van olyan sejtés is, mely szerint $\lambda(G) \leq \Delta^2$. $\lambda(G;\, 3, 2, 1)$-re jelenleg $\Delta$-ban köbös felső korlát van[7]: $\lambda(G; 3, 2, 1) \leq \Delta^3 + \Delta^2 + 3\Delta$, illetve egy ennél már alacsonyabb korlátot is találtak: $\lambda(G; 3, 2, 1) \leq \Delta^3 + 2\Delta$. Az eddig említett korlátok általános gráfokra vonatkoznak. Ennél lényegesen jobbak adhatóak a fákra.

## 2.2. Más paramétereket is használó korlátok

Ahhoz, hogy más korlátokat is megismerhessünk, új paramétereket kell bevezetni.

3−fokszám: A $G$ gráf egy $v$ csúcsának 3−fokszáma $G$ azon csúcsainak száma, melyek $v$-től vett távolsága legfeljebb 3. Jelölése: $d_3(v)$. Hasonlóan a hagyományos fokszámhoz, itt is definiálható $\delta_3(G)$ és

$\Delta_3(G)$, melyek a $G$-beli csúcsok minimális, illetve maximális $3-$fokszámát jelölik.

$k-3-$színezés: A gráf csúcsainak egy olyan, $k$ színt használó jó színezése, amelyben bármely két olyan csúcs, melyek távolsága legfeljebb 3, különböző színű. $\chi_3(G)$ jelöli azt a legkisebb $k$ számot, melyre $G$ $k-3-$színezhető.

$3-$kritikusság: Egy $G$ gráf $3-$kritikus, ha minden $H$ valódi részgráfjára $\chi_3(H) < \chi_3(G)$ teljesül. Könnyű belátni, hogy minden $3-$kritikus gráf összefüggő.

$3-$függetlenség: Egy $S \subseteq V(G)$ részhalmazt $G$ egy $3-$független halmazának nevezünk, ha bármely két $S$-beli csúcs távolsága nagyobb 3-nál.

**Tétel:** [6]Ha $G$ $k-3-$kritikus, akkor $\delta_3(G) \geq k-1$ .

**Tétel:** [6]$\chi_3(G) \leq 1 + max_{H \subseteq G}(\delta_3(H))$.

**Tétel:** [6]$\chi_3(G) \leq 1 + (max_{H \subseteq G}(\delta(H)) \cdot (\Delta^2 - \Delta + 1)$.

**Tétel:** [6]Minden egyszerű, síkbarajzolható $G$ gráfra igaz, hogy $\chi_3(G) \leq 1 + 5(\Delta^2 - \Delta + 1)$.

**Tétel:** [6]Minden egyszerű $G$ gráfra $\lambda(G;\, 3,2,1) \leq (\sum_{i=1}^{3} \chi_i(G_i))-3$, ahol $\chi_1$ és $\chi_2$ hasonlóan definiálható, mint $\chi_3$. ($\chi_1$ a hagyományos kromatikus szám.)

**Következmény:** [6]Minden egyszerű $G$ gráf esetén $\lambda(G;\, 3,2,1) \leq 3\chi_3(G) - 3$.

**Tétel:** [6]$\lambda(G;\, 3,2,1) \leq 3(max_{H \subseteq G}(\delta_3(H))$.

**Tétel:** [6]Minden egyszerű, síkbarajzolható $G$ gráf esetén $\lambda(G;\, 3,2,1) \leq 3(max_{H \subseteq G}(\delta(H)) \cdot (\Delta^2 - \Delta + 1)$.

**Tétel:** [6]Minden egyszerű, síkbarajzolható $G$ gráf esetén $\lambda(G;\, 3,2,1) \leq 15(\Delta^2 - \Delta + 1)$.

## 2.3. Utak és körök Descartes-szorzatának $L(3,2,1)-$számozása

Adott $k$ darab gráf: $G_1, G_2, ..., G_k$, ezek $G_1 \times G_2 \times ... \times G_k$-val jelölt Descartes--szorzata így áll elő:

$$V(G_1 \times G_2 \times ... \times G_k) = V(G_1) \times V(G_2) \times ... \times V(G_k)$$

$$E(G_1 \times G_2 \times ... \times G_k) = \{(u_1, u_2, ..., u_k)(v_1, v_2, ..., v_k) \,|$$

$$|\, u_l, v_l \in V(G_l), (\forall l:\ 1 \le l \le k),\ (\exists i:\ (u_i v_i \in E(G_i)),\ (u_j = v_j,\ ha(j \ne i)))\}$$

Ez utak esetén a következő:

$$V(P_{m_1} \times P_{m_2} \times ... \times P_{m_k}) = \{(i_1, i_2, ..., i_k) \,|\, 1 \le i_l \le m_l,\ \forall l:\ 1 \le l \le k\}$$

$$E(P_{m_1} \times P_{m_2} \times ... \times P_{m_k}) = \{(i_1, i_2, ..., i_k)(j_1, j_2, ..., j_k) \,|\, \sum_{l=1}^{k} |i_l - j_l| = 1\}$$

**Tétel:** [7]Minden $C_n$, $n \ge 3$ kör esetén

$$\lambda(C_n; 3,2,1) = \begin{Bmatrix} 6, & \text{ha} & n=3 & & & \\ 7, & \text{ha} & n & \text{páros} & & \\ 8, & \text{ha} & n & \text{páratlan} & \text{és} & n \ne 3;\, 7 \\ 9, & \text{ha} & n=7 & & & \end{Bmatrix}$$

**Tétel:** Minden $n \ge 2$ mellett $\quad \lambda(P_2 \times P_n; 3,2,1) = \begin{Bmatrix} 7, & \text{ha} & n=2 \\ 8, & \text{ha} & n=3;\, 4 \\ 9, & \text{ha} & n \ge 5 \end{Bmatrix}$

**Lemma:** $\lambda(P_m \times P_n; 3,2,1) \le 11$ minden olyan $m$, $n$ értékpárra, amelyre $n \ge m \ge 3$, és $\lambda(P_3 \times P_n; 3,2,1) \le 10$, ha $n = 4$ vagy 5.

**Lemma:** Legyen $V(C_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ és $E(C_4) = \{v_1v_2,\ v_2v_3,\ v_3v_4,\ v_4v_1\}$. Ha $f$ egy $9-L(3,2,1)-$számozása $C_4$-nek, akkor $(f(v_1),\ f(v_2),\ f(v_3)) \ne (3,0,7)$. Ha $f$ egy $10-L(3,2,1)-$számozása $C_4$-nek, akkor $(f(v_1),\ f(v_2),\ f(v_3)) \ne (3,0,8),\ (0,3,8),\ (1,4,8),\ (4,1,8),\ (4,0,8)$.

**Lemma:** $\lambda(P_3 \times P_4;\, 3,2,1) = 10$. Sőt, ha $f$ egy $10 - L(3,2,1)-$számozása $(P_3 \times P_4)$-nek, akkor $\{f(2,2),\, f(2,3)\} = \{0,5\}$ vagy $\{5,10\}$.

**Lemma:** $\lambda(P_3 \times P_5;\, 3,2,1) = 10$. Sőt, ha $f$ egy $10 - L(3,2,1)-$számozása $(P_3 \times P_5)$-nek, akkor $(f(2,2),\, f(2,3),\, f(2,4)) = (0,5,10)$ vagy $(10,5,0)$.

**Tétel:** Minden $n \geq 3$ esetén $\lambda(P_3 \times P_n;\, 3,2,1) = \left\{ \begin{array}{lll} 9, & \text{ha} & n = 3 \\ 10, & \text{ha} & n = 4;\, 5 \\ 11, & \text{ha} & n \geq 6 \end{array} \right\}$.

**Tétel:** Minden olyan $m$, $n$ értékpár esetén, amelyre $n \geq m \geq 4$, $\lambda(P_m \times P_n;\, 3,2,1) = 11$.

**Tétel:** Minden olyan $m$, $n$ értékpár esetén, amelyre $n \geq m \geq 2$,

$$\lambda(P_m \times P_n;\, 3,2,1) = \left\{ \begin{array}{llllll} 7, & \text{ha} & (m,n) = (2,2) & & & \\ 8, & \text{ha} & (m,n) = (2,3) & \text{vagy} & (2,4) & \\ 9, & \text{ha} & (m,n) = (3,3), & \text{vagy} & m = 2 \quad \text{és} & n \geq 5 \\ 10, & \text{ha} & (m,n) = (3,4) & \text{vagy} & (3,5) & \\ 11, & \text{ha} & m = 3 & \text{és} & n \geq 6, \quad \text{vagy} & n \geq m \geq 4 \end{array} \right\}$$
.

**Tétel:** $\lambda(C_m \times P_n;\, 3,2,1) = 11$, ha $m \equiv 0 \ (mod\, 4)$ és $n \geq 3$.

**Tétel:** $\lambda(C_m \times C_n;\, 3,2,1) = 11$, ha $m \equiv 0 \ (mod\, 4)$ és $n \equiv 0 \ (mod\, 12)$.

**Lemma:** Ha $f$ egy $9 - L(3,2,1)-$számozása $(P_2 \times C_n)$-nek, akkor minden olyan $u \in V(P_2 \times C_n)$ esetén, amelyre $f(u) = 2$, teljesül a következő: $f(v) \in \{5,7,9\}$, ha $v \in N(u)$. És minden olyan $w \in V(P_2 \times C_n)$, amelyre $f(w) = 7$, teljesül az, hogy $f(x) \in \{0,2,4\}$, ha $x \in N(w)$.

**Lemma:** Ha $f$ egy $9 - L(3,2,1)-$számozása $(P_2 \times C_n)$-nek, továbbá $uv \in E(P_2 \times C_n)$, akkor $\{f(u),\, f(v)\} \neq \{0,8\}$.

**Lemma:** Ha $f$ egy $9 - L(3,2,1)-$számozása $(P_2 \times C_n)$-nek, és van olyan $u = (i,j)$, $v = (k,l) \in V(P_2 \times C_n)$ csúcspár, melyre $d(u,v) = 2$ és $\{f(u),\, f(v)\} = \{0,8\}$, akkor $|i - k| = 1$.

**Lemma:** Ha $f$ egy $9 - L(3,2,1)-$számozása $(P_2 \times C_n)$-nek, és $f(1,1) = 0$, akkor $f(2,1) \in \{4,6,7\}$.

**Lemma:** Ha $f$ egy $9-L(3,2,1)-$számozása $(P_2 \times C_n)$-nek, és $f(1,1)=0$, akkor létezik olyan $(i,j) \in N_2((1,1))$, amelyre $f(i,j)=8$.

**Lemma:** Ha $f$ egy $9-L(3,2,1)-$számozása $(P_2 \times C_n)$-nek, és $f(1,1)=0$, $f(2,2)=8$, akkor $f(2,1)=5$ és $f(1,2)=3$.

**Lemma:** Ha $f$ egy $9-L(3,2,1)-$számozása $(P_2 \times C_n)$-nek, és $f(1,1)=0$, akkor $f(2,1)=5$, továbbá vagy $f(2,2)=8$, $f(1,2)=3$, vagy $f(2,n)=8$ és $f(1,n)=3$.

**Tétel:** $\lambda(P_2 \times C_n;\, 3,2,1)=9$ akkor és csak akkor teljesül, ha $n \equiv 0\ (mod\, 10)$.

**Tétel:** Ha $n$ páros és $n \neq 0\ (mod\, 10)$, $n \neq 6$, akkor $\lambda(P_2 \times C_n;\, 3,2,1)=10$.

**Tétel:** $\lambda(P_2 \times C_n;\, 3,2,1) \leq 11$, ha $n \equiv 1\ (mod\, 4)$, $n \geq 21$, vagy $n \equiv 3\ (mod\, 4)$, $n \geq 11$.

**Tétel:** Ha $n \geq 2$, $m_i \geq 3$ minden $i$-re, és $m_i \geq 4$ legalább két különböző $i$ esetén fennáll, akkor $\lambda(P_{m_1} \times P_{m_2} \times ... \times P_{m_n}) = 2n+2$.

**Tétel:** Ha $n \geq 2$, $m_n = 2$, $m_i \geq 3$ minden $1 \leq i \leq n-1$ esetén, és $m_i \geq 4$ legalább két különböző $i$-re vagy $m_i \geq 5$ legalább egy $i$-re fennáll, akkor $\lambda(P_{m_1} \times P_{m_2} \times ... \times P_{m_n}) = 2n+1$.

**Lemma:** Ha $G = P_{m_1} \times P_{m_2} \times ... \times P_{m_k}$, akkor $\lambda(G;\, 3,2,1) \leq 4k+3$.

**Tétel:** A $G = P_{m_1} \times P_{m_2} \times ... \times P_{m_k}$, $(m_k \geq m_{k-1} \geq ... \geq m_1 \geq 3)$ gráfban, amennyiben $k \geq 3$ és $m_{k-2} \geq 4$, akkor $\lambda(G; 3,2,1) = 4k+3$.

**Definíció:** Legyen $n$ egy pozitív egész szám, ekkor a $Q_n$ $n-$dimenziós kocka a következő: $Q_n = G_1 \times G_2 \times ... \times G_n$, ahol $G_i = P_2$ minden $i$-re, $1 \leq i \leq n$.

Griggs és Yeh a következő eredményt adta ezek $(2,1)-$számozásával kapcsolatban:

**Tétel:** $\lambda(Q_3;\, 2,1)=6$, $\lambda(Q_4;\, 2,1)=7$, $\lambda(Q_5;\, 2,1)=8$ és minden $n \geq 6$ esetén $n+3 \leq \lambda(Q_n;\, 2,1) \leq 2n+1$.

**Tétel:** Minden $n \geq 3$ esetén $2n+3 \leq \lambda(Q_n;\, 3,2,1) \leq 4n+3$.

## 2.4. Utak hatványának $L(3,2,1)-$számozása

**Definíció:** A $G$ gráf $G^r$-rel jelölt $r$-edik hatványa a következő: $V(G^r) = V(G)$, $E(G^r) = \{uv \,|\, u, v \in V(G), \text{és}\, d_G(u,v) \leq r\}$. Itt $d_G(u,v)$ az $u$ és a $v$ csúcs $G$-beli távolságát jelöli.

**Lemma:** Ha $r+2 \leq n \leq 3r$, akkor $\lambda(P_n^r; 3,2,1) = n + 2r$.

**Lemma:** $\lambda(P_{3r+1}^r; 3,2,1) = 5r$. Sőt, ha $f$ egy $(5r) - L(3,2,1)-$számozása $P_{3r+1}^r$-nek, akkor $f(\{v_{r+1}, v_{r+2}, ..., v_{2r+1}\}) = \{0, 5, ..., 5r\}$.

**Lemma:** Ha $f$ egy $L(3,2,1)-$számozása $P_{3r+1}^r$-nek, és
$max\{f(v) \,|\, v \in V(P_{3r+1}^r)\} = a$, akkor
$a \geq 5r+2$, ha $\{0, a\} \cap \{f(v_{r+1}),\, f(v_{r+2}), ...,\, f(v_{2r+1})\} = \emptyset$.

**Lemma:** Ha $3r+2 \leq n \leq 5r+2$, akkor $\lambda(P_n^r; 3,2,1) = 5r+1$.

**Lemma:** $\lambda(P_n^r; 3,2,1) = 5r+2$, ha $n \geq 5r+3$.

**Tétel:** Ha $n$, $r \geq 1$, akkor

$$\lambda(P_n^r; 3,2,1) = \left\{ \begin{array}{lll} 3n-3, & \text{ha} & n \leq r+1 \\ n+2r, & \text{ha} & r+2 \leq n \leq 3r \\ 5r, & \text{ha} & n = 3r+1 \\ 5r+1, & \text{ha} & 3r+2 \leq n \leq 5r+2 \\ 5r+2, & \text{ha} & n \geq 5r+3 \end{array} \right\}.$$

## 2.5. Az $L(3,2,1)-$színezés általánosítása: az $L(d_1, d_2, d_3)-$színezés

A fogalommal már találkoztunk a Bevezetésben. Most olyan korlátokat ismerhetünk meg, amelyek használják a $\chi_i$ és $\delta_i$, $(i = 1,2,3)$ paramétereket. A következő tételben megjelenik a $G_2$ és $G_1$ segédgráf. Ezeket a következő konstrukcióval kapjuk:

(1) Legyen $G = G_3$. $G_3$ csúcsai particionálhatóak $\chi_3(G)$ darab $3-$független halmazba. Legyen egy ilyen partíció $(V_1^{(3)}, V_2^{(3)}, ..., V_{\chi_3(G_3)}^{(3)})$. Most húzzunk össze $G_3$-ban minden $V_i^{(3)}$-t, $(i = 1,2, ..., \chi_3(G_3))$ egy-egy csúccsá. Így kapjuk meg a $G_2$ gráfot.

(2) $G_2$ csúcsai particionálhatóak $\chi_2(G_2)$ darab $2-$független (A $3-$függetlenhez hasonlóan definiálható.) halmazba. Legyen egy ilyen partíció $(V_1^{(2)}, V_2^{(2)}, ..., V_{\chi_2(G_2)}^{(2)})$. Most húzzunk össze $G_2$-ben minden $V_i^{(2)}$-t, $(i = 1, 2, ..., \chi_2(G_2))$ egy-egy csúccsá. Így kapjuk meg a $G_1$ gráfot.

(3) $G_1$ csúcsai particionálhatóak $\chi(G_1)$ darab független halmazba. Legyen egy ilyen partíció $(V_1^{(1)}, V_2^{(1)}, ..., V_{\chi(G_1)}^{(1)})$. Most húzzunk össze $G_1$-ben minden $V_i^{(1)}$-t, $(i = 1, 2, ..., \chi(G_1))$ egy-egy csúccsá. Így kapjuk meg a $G_0$ gráfot.

**Tétel:** [1]Minden egyszerű $G$ gráf esetén $\lambda(G; d_1, d_2, d_3) \leq$
$d_3(\chi_3(G) - 1) + (d_2 - d_3) \cdot (\chi_2(G_2) - 1) + (d_1 - d_2) \cdot (\chi_1(G_1) - 1)$.

**Következmény:** [1]Minden egyszerű $G$ gráf esetén
$\lambda(G; d_1, d_2, d_3) \leq d_1(\chi_3(G) - 1)$.

**Tétel:** [1]$\lambda(G; d_1, d_2, d_3) \leq d_1(max_{H \subseteq G}(\delta_3(H)))$.

**Tétel:** [1]Minden egyszerű, síkbarajzolható $G$ gráf esetén $\lambda(G; d_1, d_2, d_3) \leq$
$d_1(max_{H \subseteq G}(\delta(H))) \cdot (\Delta^2 - \Delta + 1)$.

## 3. Elemi gráfok

Ebben a részben utakra, körökre és fákra vonatkozó állításokat írok le (bizonyítás nélkül).

**Állítás:** Minden $d \geq 2$ esetén[2]

$$\lambda(P_n;\, d,1,1) = \begin{cases} d, & ha \quad n = 2 \\ d+1, & ha \quad n = 3 \quad vagy \quad 4 \\ d+2 & egyébként \end{cases}$$

**Állítás:** [2]$\lambda(P_n;\, 3,2,1) = \begin{cases} 3, & ha \quad n = 2 \\ 5, & ha \quad n = 3 \quad vagy \quad 4 \\ 6, & ha \quad n = 5, 6 \quad vagy \quad 7 \\ 7, & ha \quad n \geq 8 \end{cases}$

**Állítás:** [2]Legyen $d \geq 2$. Ekkor

$$\lambda(C_n;\, d,1,1) = \begin{cases} d+2, & ha \quad n \equiv 0 \quad (mod\, 4) \\ d+3, & ha \quad n \equiv 2 \quad (mod\, 4), \quad vagy \quad n = 11 \quad és \quad d = 2 \\ 6, & ha \quad n = 7 \quad és \quad d = 2 \\ 2d & egyébként \end{cases}.$$

**Állítás:** [2]Ha egy $T$ fának a legnagyobb fokszáma $\Delta$, akkor

$$\lambda(T;\, d,1,1) = \begin{cases} (\Delta + d - 2) + \Delta, & ha \quad \Delta \geq d \\ (\Delta + d - 2) + d, & ha \quad \Delta < d \end{cases}.$$

**Tétel:** [2]Ha $T$ egy olyan gyökeres fa, amelynek a leveleket leszámítva minden csúcsának $n$ gyermeke van (úgynevezett $n$-áris fa), és legalább 3 a magassága, akkor $\lambda(T;\, 3,2,1) = 2n + 5$.

**Lemma:** [2]Ha $T$ egy gyökeres fa, amelynek gyökere $v$, akkor $\lambda(T;\, 3,2,1) \leq 2\Delta + 3$. Sőt, $T$-nek létezik olyan $f$ $(2\Delta + 3) - L(3,2,1)-$színezése, amelyre $f(u) \equiv d(u,v)$ $(mod\, 2)$ minden $u \in V(T)$ esetén.

**Állítás:** [2]Ha egy $T$ fának a legnagyobb fokszáma $\Delta$, akkor $2\Delta + 1 \leq \lambda(T;\, 3,2,1) \leq 2\Delta + 3$.

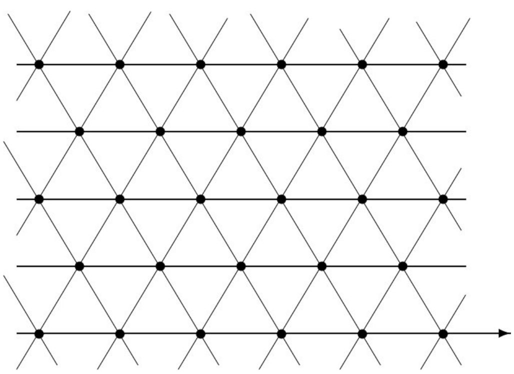
# 4. Hálógráfok

A gyakorlatban három hálónak van kiemelkedő szerepe: A háromszöges, a négyzetes és a hatszöges hálónak. Mivel elméleti szempontból az első kettő könnyebben kezelhető, most ezekkel foglalkozunk részletesebben. Ezek pontos megadásához 3 euklideszi síkbeli vektorra van szükség:

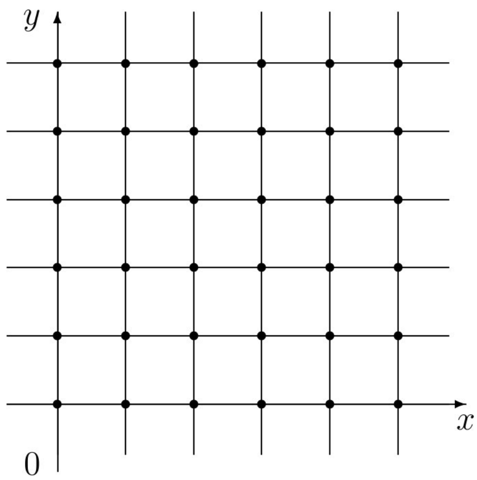
$\epsilon_1 = (1, 0)$, $\epsilon_2 = (0, 1)$ és $\epsilon_3 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Ekkor a két háló megadása:

$\Gamma_{\triangle}$háromszöges háló: $V(\Gamma_{\triangle}) = \{i\epsilon_1 + j\epsilon_3 : i, j \in \mathbb{Z}\}$ és $E(\Gamma_{\triangle}) = \{uv : u, v \in V(\Gamma_{\triangle}), d_E(u, v) = 1\}$, ahol $d_E(u, v)$ $u$ és $v$ euklideszi távolságát jelöli.

$\Gamma_{\square}$négyzetes háló: $V(\Gamma_{\square}) = \{i\epsilon_1 + j\epsilon_2 : i, j \in \mathbb{Z}\}$ és $E(\Gamma_{\square}) = \{uv : u, v \in V(\Gamma_{\square}), d_E(u, v) = 1\}$.



1. ábra. Háromszöges háló




2. ábra. Négyzetes háló

Mindkét háló (a háromszöges és a négyzetes) esetén a praktikusság végett a csúcsokat $(i, j)$-vel jelöljük. A háromszöges hálónak a rádió-, illetve mobilhálózatoknál van jelentősége. A gyakorlatban ugyanis a nagy területeket általában hasonló sokszögekkel fedik le. A tapasztalat azt mutatja, hogy a szabályos hatszögekkel való lefedés a leggazdaságosabb. Ekkor, ha az egyes hatszögek középpontjában vannak az adók, amelyeket a hálógráf csúcsainak tekintünk, továbbá azokat a csúcsokat kötjük össze, amelyeknek megfelelő hatszögek szomszédosak, akkor a kapott gráf a háromszöges háló. Az alábbiakban olvasható néhány hálógráfokra vonatkozó állítás.

**Tétel:** [2] $\lambda(\Gamma_{\square}; d, 1) = \begin{cases} 6, & ha \quad d = 2 \\ 8, & ha \quad d = 3 \\ d+6, & ha \quad d \geq 4 \end{cases}$. A $\lambda(\Gamma_{\square}; d, 1)$ értékéből kaphatunk alsó korlátokat a $\lambda(\Gamma_{\square}; d, 1, .)$ értékekre.

**Állítás:** [2] $\lambda(\Gamma_{\square}; d, 1, 1) \leq d + 6$, ha $d \geq 2$.

**Lemma:** [2] $\lambda(\Gamma_{\square}; 2, 1, 1) \geq 8$.

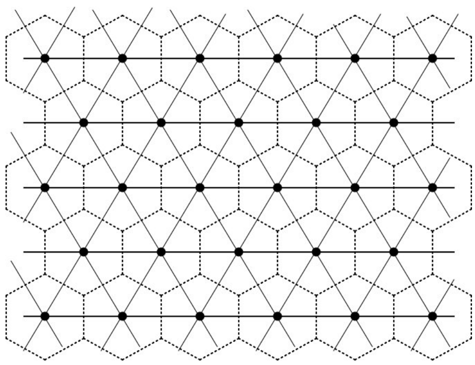
**Lemma:** [2] $\lambda(\Gamma_{\square}; 3, 1, 1) \geq 9$.

**Lemma:** [2] $\lambda(\Gamma_{\square}; d, 1, 1) \geq d + 6$, ha $d \geq 4$.

**Tétel:** [2] $\lambda(\Gamma_{\square}; d, 1, 1) = d + 6$, ha $d \geq 2$.

**Tétel:** [2] $\lambda(\Gamma_{\square}; 3, 2) = 11$.

**Tétel:** [2] $\lambda(\Gamma_{\square}; 3, 2, 1) = 11$.



3. ábra. Hatszöges háló: Erre vonatkozó eredményeket most nem írok le. Azért tettem be ide mégis ezt az ábrát, mert a hatszöges háló az, ami a gyakorlatban a legpraktikusabb és a legelterjedtebb.

# 5. Élek íve

A fenti kifejezés egy kicsit furcsán hangozhat. Az eredeti, angol fogalom Edge Span. A kifejezésre nehéz megfelelő magyar szót találni. Ennél sokkal egyszerűbb feladat egy mondattal leírni a jelentését. Tegyük fel, hogy $f$ a $G$ gráf egy jó $L(d_1, d_2, d_3)-$színezése. Ekkor $f$ élíve a $max\{|f(u) - f(v)| : uv \in E(G)\}$. $G$-nek az $L(d_1, d_2, d_3)-$élíve az a minimális élív, amely $G$ jó $L(d_1, d_2, d_3)-$színezéséhez tartozik. Ezt az értéket $\beta(G;\, d_1, d_2, d_3)$-mal jelöljük.

## 5.1. Tulajdonságok és egyszerű eredmények[3]

1. Ha $H$ $G$-nek egy részgráfja, akkor $\beta(H;\, d_1, d_2, d_3) \leq \beta(G;\, d_1, d_2, d_3)$.

2. Ha $d_i \geq k_i$, $i = 1, 2, 3$, akkor $\beta(G;\, d_1, d_2, d_3) \geq \beta(G;\, k_1, k_2, k_3)$.

3. $d_1 \leq \beta(G;\, d_1, d_2, d_3) \leq \lambda(G;\, d_1, d_2, d_3)$.

4. Ha $G$ egy $r-$reguláris gráf, akkor $\beta(G;\, d_1, d_2, d_3) \geq d_1 + (r-1) \cdot d_2$.

Legyen $P_n$ és $C_n$ $n$ hosszú út, illetve kör, $K_n$ pedig az $n$ csúcsú teljes gráf. Ekkor igazak a következőek:

1. $\beta(K_n;\, d_1, d_2, d_3) = (n-1) \cdot d_1 = \lambda(K_n;\, d_1, d_2, d_3)$.

2. $\beta(P_n;\, d_1, d_2, d_3) = d_1$, ahol $n \geq 2$.

3. $\beta(C_n;\, d_1, d_2, 1) = d_1 + d_2$, ha $d_2 \leq d_1 \leq 3d_2$, ahol $n \geq 4$.

## 5.2. Végtelen gráfok

Jelölje $\Gamma_{\mathbb{Z}}$ a mindkét oldalról végtelen utat, $\Gamma_{\Box}, \Gamma_{\triangle}, \Gamma_H$ pedig a már korábban definiált négyzetes, háromszöges, illetve hatszöges hálót. Ezekre a következő eredmények állnak már rendelkezésünkre:[3]

1. $\beta(\Gamma_{\mathbb{Z}};\, d_1, d_2, d_3) = d_1 + d_2$.

2. $\beta(\Gamma_{\Box};\, d_1, d_2, 1) = \begin{cases} 5, & ha \quad d_1 = d_2 = 1 \\ d_1 + 3d_2, & ha \quad d_1 \neq d_2,\, 2d_2,\, 3d_2 \end{cases}$.

3. $$\beta(\Gamma_\triangle;\, 3, 2, 1) = 16.$$

4. $$\beta(\Gamma_H;\, d_1, d_2, 1) = \begin{cases} 4, & ha \quad d_1 = d_2 = 1 \\ d_1 + 2d_2 & egyébként \end{cases}.$$

## 6. További általánosítás

Az $L(3,2,1)-$színezést már általánosítottuk egyszer, bevezettük az $L(d_1, d_2, d_3)-$színezést. Általánosítani a legtöbbször többféleképpen is lehet. Ez most is így van. A klasszikus gráfszínezést követte az $L(2,1)-$, illetve az $L(d_1, d_2)-$színezés, majd az $L(3,2,1)-$, illetve az $L(d_1, d_2, d_3)-$színezés. Ugyanígy bevezethető természetesen az $L(n,\ n-1, ..., 2, 1)-$, illetve az $L(d_1, d_2, ..., d_{n-1}, d_n)-$színezés. Ugyan elég egyértelmű, hogy ezek mit takarnak, de a rend kedvéért álljon itt a definíció:

**Definíció:** Adottak a $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq ... \geq d_n \geq 1$ egész számok ($n \geq 2$). Egy $G(V,E)$ gráf egy jó $L(d_1, d_2, ..., d_{n-1}, d_n)-$színezése egy olyan $f$, $f : V \rightarrow \{0, 1, 2, ..\}$ függvény, amelyre $|f(u) - f(v)| \geq d_i$, ha $v$ és $u$ távolsága $G$-ben $i$, $i = 1, 2, ..., n$. A $G$ gráf $L(d_1, d_2, ..., d_n)-$száma, $\lambda(G; d_1, d_2, ..., d_n)$, az a legkisebb $k$ szám, amelyre van $G$-nek olyan $L(d_1, d_2, ..., d_n)-$színezése, amelyben $k$ a legnagyobb.

Ezen definíció megjelenése után Jin kiterjesztette a $(d_1, d_2, ..., d_n)$ értékeket egészről valósra.

# 7. A feladat kitűzése

Kiválasztottam egy tételt, amellyel többet foglalkoztam. Ez a következő:

**Tétel:** Ha egy $T$ fának a legnagyobb fokszáma $\Delta$, akkor
$2\Delta + 1 \leq \lambda(T;\, 3, 2, 1) \leq 2\Delta + 3$.

Ezzel kapcsolatban két kérdés merült fel bennem. Az egyik az, hogy van-e szükséges vagy elégséges, esetleg szükséges és elégséges feltétel arra, hogy $\lambda(T;\, 3, 2, 1)$ értéke pontosan az egyik legyen a 3 lehetséges közül. Az egyik lehetőség az, hogy van ilyen, legalább valamelyik értékre. A másik az, hogy nincs, esetleg azért, mert a probléma NP-nehéz. A másik felmerülő kérdés az, hogy megfogalmazható-e valamilyen hasonló állítás a fák $L(n,\, n-1, ..., 2, 1)-$színezésére. Annak érdekében, hogy közelebb kerüljek bármelyik kérdés megválaszolásához, elkezdtem olyan eredményeket keresni az irodalomban, amelyek szorosabban kötődnek a fák ezen speciális színezéséhez. Természetesen az első kiinduló pont a fenti tétel bizonyítása volt. Ez a bizonyítás konstruktív, azaz miután belátjuk, hogy az alsó korlát helyes, mutat egy jó $L(3, 2, 1)-$színezést $2\Delta + 3$ színnel, ezzel igazolva a felső korlát helyességét is.

**Bizonyítás:** Könnyen látható, hogy ha $T \simeq K_{1,\Delta}$, akkor $\lambda(T;\, 3, 2, 1) = 2\Delta + 1$. Van $\Delta$ darab csúcs, amelyek $\Delta$ darab különböző számot kapnak, melyek közül bármelyik kettő különbsége legalább 2, a központi csúcs számának bármelyikkel vett különbsége legalább 3. Egy jó $L(3, 2, 1)-$színezéshez legalább $2\Delta + 1$ színre van szükségünk. Másrészről, a központi csúcs megkaphatja a 0, a szomszédai pedig a 3,5,...,2$\Delta$+1 számokat. Minden $\Delta$ maximális fokszámú fa szükségszerűen tartalmazza a $K_{1,\Delta}$-t részgráfként. Emiatt $2\Delta + 1 = \lambda(K_{1,\Delta};\, 3, 2, 1) \leq \lambda(T;\, 3, 2, 1)$.

A 2. részben mutatunk $T$-nek egy olyan jó színezését, amelyben a legnagyobb előforduló szám a $2\Delta + 3$. Ebből következik, hogy $\lambda(T;\, 3, 2, 1) \leq 2\Delta + 3$. Legyen $r$ egy fő csúcs, azaz egy olyan, melynek a fokszáma $\Delta$. Ábrázoljuk a fát $r$ gyökérrel. Először is, legyen $r$ száma 0. Másodszor, a szomszédai kapják meg a 3,5,...,$2\Delta + 1$ ($\Delta$ darab szám) számokat. $r$ minden $v$ szomszédja esetén számozzuk a még számozatlan szomszédokat a {2,4,...,$2\Delta + 2$} ($\Delta$ darab szám) halmazból. Nyilván egyik $v$ csúcsnak sem lehet $(\Delta - 1)$-nél több színezetlen szomszédja. Azt mondjuk, hogy $r$ van a 0-adik szinten, a szomszédai az 1.-n, azok szomszédai a 2.-on, és így tovább. Tekintsük a következő két halmazt: $L_0 = \{0, 2, ..., 2\Delta + 2\}$és $L_1 = \{1, 3, ..., 2\Delta + 3\}$. Ekkor $|L_0| = |L_1| = \Delta + 2$. A páratlan szinten lévő csúcsokhoz az $L_1$, a páros szinteken lévőekhez pedig az $L_0$ halmazból rendelünk színeket. Tegyük fel, hogy a $k$-adik szintig már meg vannak számozva a csúcsok. Legyen $v$ egy a $k$-adik szinten lévő csúcs, $u$ a felmenője a $(k - 1)$-ediken, $w$ pedig $u$ felmenője a $(k - 2)$-ediken. Jelölje $v$ számát $L(v)$. A következő lépésben $v$ gyermekeit fogjuk megszámozni. (Innentől általánosan $L(S)$ fogja jelölni az $S$-beli csúcsok számainak halmazát.) Ha $L(v) \in L_1$, akkor az $(N(v) - u)$-ban lévő csúcsokhoz az $L_0$-ból fogunk számokat rendelni. Ha $L(v) \in L_0$, akkor az $L_1$-ből. Tegyük most fel, hogy $L(v) \in L_1$. Ekkor $L(u) \in L_0$, $L(N(u) - w) \in L_1$ és $L(w) \in L_1$. Mivel $|N(v) - u| \leq \Delta - 1$, legfeljebb $\Delta - 1$ olyan $L_0$-beli számra van szükségünk, melyek közül bármelyik kettő különbsége legalább 2 és bármelyik különbsége $L(v)$-vel ($\in L_1$) legalább 3. Ha $L_0$-ból kivesszük $(L(v) \pm 1)$-et és $L(u)$-t, akkor még mindig marad $\Delta - 1$ darab szám, és ennyi elég is. Mivel $L_0$-ban bármely két szám különbsége legalább 2, $v$ minden leszármazottjának száma közti különbség is, illetve az $u$ számától vett különbségük is. Mivel $L(w) \in L_1$, mindegyik szám különbözni fog $w$ számától, ezen kívül csak olyan számokat hagytunk meg $L_0$-ban, amelyek $v$ számával vett különbsége legalább 3. Tehát a számozásunk valóban jó. Az eljárás analóg abban az esetben, amikor $L(v) \in L_0$.

## 8. Az első probléma megközelítése

A $(3,2,1)-$színezésről jóval kevesebb olvasható az irodalomban, mint a $(2,1)-$színezésről. Éppen ezért találtam azt a leginkább célravezetőnek, hogy a $(2,1)-$színezésre vonatkozó eredményeket tanulmányozom. Egyrészt az egyes tételek, korlátok hasonlóak lehetnek a $(3,2,1)-$színezés esetén -persze a paraméterek valamelyest megváltoznak-, másrészt a rá vonatkozó algoritmusok között bizonyára vannak olyanok, amelyek kis módosításokkal átvihetőek $(3,2,1)$-re. Most néhány eredményt mutatok be:

A $(2,1)-$színezés a legtöbb gráf esetén NP-nehéz probléma, általános, síkbarajzolható és páros gráfokra például bizonyítottan az. Nagyon kevés olyan gráfosztály van, amelyekhez van polinom idejű algoritmusunk a $(2,1)-$színezésre. Szerencsére a fákra igen, és ezt az alábbiakban le is írom.

**Sejtés:** $\lambda(G;2,1) \le \Delta^2$ minden $G$ gráf esetén, amelynek maximális fokszáma legalább 2. Ez a sejtés egyelőre nyitott.

**Jelölés:** Egy szintezett fában jelölje a $v$ csúcs gyermekeinek halmazát $C(v)$, unokáiét $C^2(v)$.

**Jelölés:** $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$

**Lemma:** Ha $\lambda(G;2,1) = \Delta{+}1$, akkor bármely $v \in V(G)$ csúcsra $N_G[v]$ tartalmaz legalább két maximális fokszámú csúcsot.

**Lemma:** Minden $T$ fa esetén $\lambda(T;2,1)$ értéke $\Delta+1$ vagy $\Delta+2$.

Eleinte azt gondolták, hogy még annak eldöntése is NP-nehéz, hogy a fenti két érték közül melyik jellemez egy-egy fát. Chang és Kuo azonban adott egy olyan algoritmust, amely $O(\Delta^{4,5}n)$ futási időben eldönti a kérdést. Azt is megállapították, hogy ez az algoritmus lineáris idejű abban az esetben, ha $\Delta = O(1)$. Később aztán kiderült, hogy a kérdés ennél kicsit nagyobb maximális fokszámú gráfok esetén is eldönthető lineáris futási időben. Fent már találkoztunk $\lambda(T;2,1) = \Delta{+}1$ egy szükséges feltételével. Most következzen egy elégséges is:

**Jelölés:** Legyen $N^3[v]$ azon csúcsok halmaza, melyek távolsága $v$-től legfeljebb 3.

**Tétel:** Ha bármely $v \in V(T)$ csúcs esetén $N^3[v]$ legfeljebb $\Delta - 6$, és $N[v]$ legfeljebb 2 maximális fokszámú csúcsot tartalmaz, akkor $\lambda(T; 2, 1) = \Delta{+}1$.

**Következmény:** Ha a maximális fokú csúcsok száma nem haladja meg a $(\Delta - 6)$-ot, akkor $\lambda(T; 2, 1) = \Delta{+}1$ szükséges és elégséges feltétele az, hogy minden $v \in V(T)$-re $N[v]$ legfeljebb 2 maximális fokú csúcsot tartalmazzon.

**Következmény:** Ha $\Delta > \sqrt{n + \frac{65}{16}} + \frac{11}{4}$, akkor $\lambda(T; 2, 1) = \Delta{+}1$ szükséges és elégséges feltétele az, hogy minden $v \in V(T)$-re $N[v]$ legfeljebb 2 maximális fokú csúcsot tartalmazzon.

Ez a feltétel lineáris időben ellenőrizhető. Ráadásul, ha $\Delta > \sqrt{n + \frac{65}{16}} + \frac{11}{4}$ és $\lambda(T; 2, 1) = \Delta{+}1$, akkor egy jó $(\Delta + 1) - L(2, 1)-$számozás található is lineáris időben.

# Algoritmusok

## 8.1. Greedy algoritmusa

Ábrázoljuk a fát gyökeresen, és számozzunk a gyökértől lefelé. Ha elértünk a $v$ csúcshoz, amelynek a száma $a$, felmenőjének a száma $b$, akkor $v$ gyerekeit számozzuk a $\{0, 1, ..., \Delta + 2\} - \{b, a - 1, a, a + 1\}$halmazból. Ez mindig lehetséges, mivel $|C(v)| \leq |\{0, 1, ..., \Delta + 2\} - \{b, a - 1, a, a + 1\}|$ minden $v$ csúcs esetén igaz. Az algoritmus végén egy jó $(\Delta + 1) - L(2, 1)-$számozást kapunk.

## 8.2. Chang és Kuo algoritmusa

Az algoritmus dinamikus programozást alkalmaz. Akkor áll meg, ha $\lambda(T; 2, 1) = \Delta + 1$, és ebben az esetben könnyen meg is adhatunk egy jó számozást. A

továbbiakban a $T$ fát gyökeresként ábrázoljuk egy első fokú csúccsal (levéllel) mint gyökérrel ($r$). Egy adott $v$ csúcsnál $T$ $v$ gyökerű részfáját $T(v)$-vel jelöljük. Legyen $T(u, v)$ egy $u$ gyökerű fa,
$T(u, v) = (\{u\} \cup V(T(v)), \{(u, v)\} \cup E(T(v)))$. Ez utóbbi konstrukcióban $u$ csak egy virtuális csúcs, $T(u, v)$ pedig egyértelműen rendelhető hozzá $T(v)$-hez. Egy gyökeres fa magassága a fában lévő gyökér-levél utak hosszának maximuma. Bevezetjük a következő $\delta$ függvényt:

$$\delta((u, v), (a, b)) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & ha \;\; \lambda(T(u, v); 2, 1) \,|\, f(u) = a, \; f(v) = b \leq \Delta + 1 \\ 0 & egyébként \end{array} \right\}$$

Itt $\lambda(T(u, v); 2, 1) \,|\, f(u) = a, \; f(v) = b$ jelöli $T(u, v)$ $L(2, 1)-$számát az $f(u) = a, \; f(v) = b$ feltétel mellett. A $\delta$ függvény értéke akkor és csak akkor 1, ha a $w_1, w_2, ..., w_{d'(v)}$ csúcsok megszámozhatóak olyan eltérő $c_1, c_2, ..., c_{d'(v)}$ számokkal, amelyek egyike sem egyezik meg a következőekkel: $a, b, b-1, b+1$, továbbá $\delta((v, w_i), (b, c_i)) = 1$ minden $i$ esetén teljesül. $w_1, w_2, ..., w_{d'(v)}$ jelölik $v$ gyermekeit. Azt a kérdést, hogy ezeknek van-e jó számozása, formálisan leírja a következő maximális párosítási probléma: Képzeljünk el egy $G(u, v, a, b) = (V(v), \; X, \; E(u, v, a, b))$ páros gráfot, ahol $V(v) = \{w_1, w_2, ..., w_{d'(v)} \in C(v)\}$, $X = \{0, 1, ..., \Delta, \Delta + 1\}$és $E(u, v, a, b) = \{(w, c) \,|\, d((v, w), (b, c)) = 1, \; c \in X - \{a\}, \; w \in V(v)\}$. Pontosan akkor létezik a $w_1, w_2, \ldots, w_{d'(v)}$csúcsoknak a keresett $c_1, c_2, \ldots, c_{d'(v)}$ számozása, ha a $G(u, v, a, b)$ gráfban van $d'(v)$ méretű párosítás. A $T(u, v)$ fához és az $a, b$ színekhez polinomiális időben meghatározható a $\delta((u, v), (a, b))$ értéke, ha ismerjük $\delta$ értékét minden $T(v, w_i)$, illetve minden számozási pár esetén. Ezen észrevételek után következzen az algoritmus:

1. Legyen $\delta((u, v), (*, *)) = 1$ minden 1 magasságú $T(u, v)$ fánál, ahol $(*, *)$ jelenti az összes olyan $a, b$ párt, amelynél $|a - b| \geq 2$. Legyen $h = 2$.

2. Minden $h$ magasságú $T(u, v)$ fához számoljuk ki $\delta((u, v), (*, *))$-ot.

3. Ha $h = h^*$, ahol $h^*$a fa magassága $r$-rel mint gyökérrel, akkor ugorjunk a 4. lépésre. Egyébként $h := h + 1$, és térjünk vissza a 2. lépéshez.

4. Ha $\delta((r,v),(a,b))=1$ valamely $(a,b)$ párra, akkor legyen az algoritmus kimenete ˝Igen˝, egyébként ˝Nem˝. Itt véget ér az algoritmus.

Mivel az 1., a 3. és a 4. lépés csupán egy keresésből áll a $\delta$ már kiszámolt értékeit tartalmazó táblázatban, a futási időt főleg a 2. lépés határozza meg. Az algoritmus teljes futási ideje $O(\sum_{v\in V} t(v))$, ahol $t(v)$ a $d((u,v),(*,*))$ érték kiszámításának idejét jelöli. Az összes, a 2. lépésben lévő $\delta((u,v),(a,b))$ számolás elvégezhető $O(|V(v)\cup X|^{2,5})=O(\Delta^{2,5})$ időben, mert ismert $O(n^{2,5})$ idejű algoritmus az $n$ csúcsú páros gráfokban lévő maximális párosítások keresésére. Mivel az $(a,b)$ párok száma legfeljebb $(\Delta+2)(\Delta+2)$, megállapíthatjuk, hogy $t(v)\leq(\Delta+2)^2\cdot O(\Delta^{2,5})=O(\Delta^{4,5})$. Az algoritmus teljes futási ideje: $O(\sum_{v\in V} t(v))=O(\Delta^{4,5}n)$.

Később sikerült úgy implementálni az algoritmust, hogy annak futási ideje $O(\Delta^{1,5}n)$-re csökkent.

# 9. A második probléma megközelítése

Ebben a fejezetben teljes egészében az én próbálkozásaimról lesz szó. Először a gondolatokról, aztán pedig egy konkrét eredményről, illetve a későbbiekre vonatkozó ötletekről.

Az $n = 1$ eset a klasszikus gráfszínezés, azaz két szomszédos csúcs nem kaphat azonos színt/számot. Fáknak egy ilyen számozásához elegendő a 0 és az 1, azaz $\lambda(T; 1) = 1$. A korábbi fejezetekből már tudjuk, hogy $\Delta + 1 \leq \lambda(T; 2, 1) \leq \Delta + 2$, $(n = 2)$ és $2\Delta + 1 \leq \lambda(T; 3, 2, 1) \leq 2\Delta + 3$ , $(n = 3)$. Hasonló korlátokat szeretnék találni nagyobb $n$ értékekre. Elsőként azt néztem meg, hogy a korlátokban, melyek $\Delta$ polinomjai, mi lehet a legmagasabb kitevő. A felső korlátnál a „legrosszabb eset” miatt nyilván kiindulhatunk olyan fákból, amelyekben minden belső csúcs fokszáma $\Delta$, illetve elég nagy átmérőjű, ami most $n$-et jelent, tehát két egymástól legtávolabb lévő csúcs (levél) távolsága $n$. Ez a fa kétféle lehet attól függően, hogy $n$ páros vagy páratlan. Ha páros, akkor van egy központi csúcs, amely minden levéltől pontosan $\frac{n}{2}$ távolságra van. Ezt a csúcsot tekintjük gyökérnek, tőle szintezzük a fát, ami $\frac{n}{2} = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ szintű lesz. Ha páratlan, akkor van egy központi él a fában. Ez az egymástól pontosan $n$ távolságra lévő levelek közti út középső éle. Célszerű a fát úgy ábrázolni, hogy ennek az élnek a két végpontja kerüljön a legfelső szintre, utána pedig szintezzük a fát értelemszerűen. Tehát most egy dupla gyökerű fából indulunk ki, amely $\frac{n-1}{2} = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ szintű lesz. Ezekben a fákban bármely két csúcs távolsága legfeljebb $n$, tehát a számuk is különböző. Emiatt a szükséges számok legalább annyian vannak, mint a csúcsok. Másrészt a maximális számuk várhatóan a csúcsok számának konstansszorosa, ahol ez a konstans $n$-től függ ($n = 1, 2, 3$-nál például $n - 1$). Egyszerűen adódik, hogy abban a polinomban, amely a csúcsok számát fejezi ki, és így abban is, amely a korlátokat, a vezető tag kitevője megegyezik a fa szintjeinek számával (mindkét esetben), azaz $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. A másik érdekesség, amit a már ismert $n = 1, 2, 3$-es korlátoknál megfigyeltem, az, hogy a polinom konstans tagja az alsó korlátnál 1, a felső korlátnál pedig $n$.

## 9.1. Egy konkrét alsó korlát a fenti fáknál

Vezessük be a fa súlyozott hatványgráfját: A hatványgráf csúcshalmaza megegyezik az eredeti gráf csúcshalmazával. A $d$-edik hatványgráfban két csúcs akkor és csak akkor szomszédos, ha a gráfban a távolságuk legfeljebb $d$, tehát egy összefüggő gráf $n$-edik hatványa egy teljes gráf. Súlyozzuk az $n$-edik hatványgráf éleit úgy, hogy ha egy él két végpontjának a távolsága a fában $i$, akkor az élsúly $n - i + 1$. Tegyük fel, hogy már adott a fa egy jó $(n, n-1, ..., 1)-$számozása. Állítsuk sorba a csúcsokat a számaik szerint növekvő sorrendben. Mivel a gráf teljes, a sorrend meghatároz egy Hamilton-utat, amelyen a számozás helyessége miatt minden egymást követő csúcspár számának különbsége legalább akkora, mint a közöttük lévő él súlya. Így a legkisebb (0) és a legnagyobb szám különbsége legalább akkora, mint az úton lévő élek összsúlya. Tehát a súlyozott $n$-edik hatványgráfban létezik olyan Hamilton-út, amelynek összsúlya nem nagyobb, mint $\lambda(T; n, n-1, ..., 1)$. Ez azt jelenti, hogy egy minimális összsúlyú Hamilton-út súlya alsó korlát. Ezen tények összegzése után azzal próbálkoztam, hogy megadjam a csúcsoknak egy olyan sorrendjét, amely által meghatározott Hamilton-út összsúlya a lehető legkisebb. Ehhez a következő megállapításokat is felhasználtam:

- Minden csúcstól a legtávolabb eső csúcsok azok a levelek, amelyeket a vele összekötő úton szerepel a központi csúcs, illetve a központi él.

- Az összes ilyen út közül az a legrövidebb, amelyik a központi csúcsot, illetve a központi él végpontjait köti össze egy, illetve egy-egy levéllel.

Nekünk az a célunk, hogy az úton minél kisebb súlyú élek legyenek. Minden csúcsnak pontosan egyszer kell szerepelnie. Az első és az utolsó csúcsnak 1-1 szomszédja lesz, a többinek pedig 2-2. Ha elérhető, hogy minden csúcs olyanokkal legyen összekötve, amelyek tőle a fában a lehető legtávolabb vannak, illetve az út szélén olyan csúcsok állnak, amelyekre ez a maximális távolság a legkisebb a gráfban, akkor ez a Hamilton-út minimális súlyú. Továbbra is szorítkozzunk azokra a fákra, amelyeknek minden belső csúcsa $\Delta$ fokú, és amelyeknek minden levele azonosan mélyen van. (A legfelső szintre 1 vagy 2 csúcs kerül $d$ paritásától függően.) A fa leveleinek száma

$(\Delta - 2) \cdot$ (a belső csúcsok száma) $+ 2$. Egy ilyen fa csúcsainak felsorolásakor tehát megoldható, hogy két belső csúcs közé $\Delta - 2$ levél kerüljön. Páros $d$-nél ez azt jelenti, hogy két belső csúcs között állhat $\Delta - 2$ darab olyan levél, amelyeket a központi csúcs elválaszt páronként is és a két érintett belső csúcstól is. Ezután az a kérdés, hogy a belső csúcsok hogyan helyezkedjenek el. Ha a fának azt a részét tekintjük, amelyiket a levelek eltávolításával kapunk, akkor egy olyan fát kapunk, mint az eredeti, csak $\Delta$ és $d - 2$ paraméterekkel (az eredetinek $\Delta$ és $d$). Ezen részfa leveleinek (a fa utolsó előtti szintjén lévő csúcsok) számára ugyanaz igaz, mint a teljes fa esetén. És ez természetesen igaz minden olyan részfára, amely néhány szint elhagyása után áll elő. Ez pedig egy jó módszer az optimális sorrend felállításához: Először felsoroljuk az első két szinten lévő $\Delta + 1$ darab csúcsot úgy, hogy a központi legyen az első. Ezután hozzávesszük a következő szinten elhelyezkedő csúcsokat a fent említett módon, az eddigi utolsó csúcs mögé kerülhetnek újak, de az első elé nem. Ezt annyiszor ismételjük meg, amíg eljutunk az utolsó szintig. Ekkor teljes a sorrend. Ez pedig optimális lesz, hiszen a központi csúcs szélső, továbbá minden csúcs mellett olyan áll, amelyet a központi elválaszt tőle, belső csúcsnak csak levél szomszédja van, de a leveleknek is legfeljebb egy szomszédja belső csúcs. Meg kell határoznunk a most kapott Hamilton-út összsúlyát. Ehhez tudnunk kell, hogy milyen súlyú élekből mennyi fordul elő. Az összeszámolásnál felhasználjuk, hogy minden belső csúcsnak mindkét szomszédja tőle lehető legtávolabb lévő levél. A legfelső szinten lévő csúcs $\frac{n}{2}$ távolságra van az egyetlen szomszédjától, ezen él súlya $n - \frac{n}{2} + 1 = \frac{n}{2} + 1$. A 2. szinten $\Delta$, a 3.-on $\Delta(\Delta - 1)$ csúcs helyezkedik el, ehhez hasonlóan minden továbbin $\Delta(\Delta - 1)^{s-2}$ darab, ahol $s$ jelöli az adott szintet. Ez azt jelenti, hogy az úton $2\Delta(\Delta - 1)^{s-2}$ olyan él van, melynek súlya $n - (\frac{n}{2} + s - 1) + 1 = \frac{n}{2} - s + 2$. Ezeken kívül még olyan élek vannak, amelyek két-két, páronként a központi csúcs által elválasztott levél között vannak. Ezek súlya 1. Számoljuk össze, hogy mennyien vannak:

- a levelek száma$=(\Delta - 2) \cdot$ (a belső csúcsok száma) $+ 2$
- A Hamilton-úton
  $2 \cdot$ (a levelek száma) $- 1 = 2 \cdot (\Delta - 2) \cdot$ (a belső csúcsok száma) $+ 3$

olyan élvégpont van, amely levélhez tartozik.

- A központi csúcsnak 1, a többinek 2 szomszédja van, ezért
  $2 \cdot$ (a belső csúcsok száma) $- 1$
  olyan élvégpont van, amely nem levélhez tartozik.

- Minden élnek legfeljebb az egyik végpontja tartozik belső csúcshoz

$\Longrightarrow \frac{2\cdot(\Delta-2)\cdot(\text{a belső csúcsok száma})+3-(2\cdot(\text{a belső csúcsok száma})-1)}{2} =$
$= (\Delta - 3) \cdot (\text{a belső csúcsok száma}) + 2 = (\Delta\text{-}3)\cdot(1+\sum_{s=2}^{\frac{n}{2}} \Delta\cdot(\Delta\text{-}1)^{s-2}) + 2.$
(A $\sum$ persze csak akkor jelenik meg, ha $n \geq 4$. )
Összegezve a fentieket, megkapjuk a minimális súlyú Hamilton-út összsúlyát:
$[(\Delta-3)\cdot(1+\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-2} \Delta\cdot(\Delta-1)^{i})+2]+[\frac{n}{2}+1]+[\sum_{s=2}^{\frac{n}{2}}(\Delta\cdot(\Delta-1)^{s-2}\cdot(\frac{n}{2}-s+2))].$

Most azzal foglalkozom, hogy a fent megadott alsó korlát mikor felső is egyben. Az a kérdés tehát, hogy ha a csúcsokat a megadott módon rendezzük, majd minden csúcshoz hozzárendeljük az előző csúcs számának és az őket összekötő él súlyának az összegét, az egy jó $(n, n-1, ..., 1)$−számozást ad-e, illetve milyen esetekben ad azt. Ezt követően marad még az, hogy mi a helyzet akkor, ha a fa mélysége nagyobb, mint $\frac{n}{2}$, vagyis ha van a fában olyan csúcspár, melyek távolsága $n$-nél nagyobb. Ebben a fában a legfelső $\frac{n}{2}$ szint számozását megadja az előző feladat. Kérdéses, hogy a többi szinten lévő csúcs számozható-e legfeljebb akkora számokkal, mint amekkora a felső szinteken előfordulóaknak a legnagyobbika. Egy még általánosabb fában a belső fokszámok nem feltétlenül azonosak, de $\Delta$-nál csak kisebbek lehetnek. Ezért, ha találunk egy felső korlátot azokra a fákra, melyeknek minden belső foka $\Delta$, akkor az minden fára érvényes lesz.

Hasonlóan végiggondolható az az eset, amikor $n$ páratlan.

## 9.2. További próbálkozások felső korlátokhoz

Most néhány olyan kérdést mutatok be, amelynek megválaszolása közelebb vihet helyes felső korlátok megtalálásához.

1. Hány olyan csúcsot lehet kiválasztani, hogy ezek közül bármely kettő távolsága legfeljebb $n$? Induljunk ki abból, hogy minden fának, illetve

részfának van egy központi csúcsa vagy egy központi éle, mégpedig az, amelyik a leghosszabb út/utak középső csúcsa (ha az átmérő páros), illetve éle (ha páratlan).

2. Mi az a legkisebb $K$, amire az $n$-edik hatványgráf minden részgráfjában van olyan csúcs, amire illeszkedő élek összsúlya legfeljebb $K$?

# 10. Fafelbontások

Ebben a fejezetben egy olyan konstrukciót fogok taglalni, amely hasznosnak bizonyult elég sok kérdés teljes vagy részleges megválaszolásában. Én azért foglalkozom vele, mert az általam vizsgált problémánál is ígéretesnek tűnik. Ez a konstrukció a fafelbontás.

**Definíció:** Egy $G = (V, E)$ gráf fafelbontása egy $(\{X_i \,|\, i \in I\}, T = (I, F))$ pár, ahol $\{X_i| \, i \in I\}$ a $V$ csúcshalmaz részhalmazainak egy családja, $T$ minden csúcsához egy-egy ilyen halmaz tartozik. $T$ egy fa, amely teljesíti az alábbi feltételeket:

- $\cup_{i \in I} X_i = V$,
- minden $(v, w) \in E$ élre létezik egy $i \in I$, melyre $v \in X_i$és $w \in X_i$,
- minden $i, j, k \in I$ esetén, ha $j$ a $T$-beli $i$ és $k$ közti úton helyezkedik el, akkor $X_i \cap X_k \subseteq X_j$.

**Definíció:** Egy $(\{X_i| \, i \in I\}, T = (I, F))$ fafelbontás favastagsága $\tau(G) = max_{i \in I}|X_i| - 1$. Egy $G$ gráf favastagsága a legkisebb favastagság, amely $G$ fafelbontásából adódhat.

**Definíció:** Hasonlóan definiálható az útvastagság is. Ebben az esetben az is kikötés, hogy $T$ egy út legyen.

A gráf triviális fafelbontása egy egyetlen csúcsból álló fa, a csúcshoz tartozó halmaz tartalmazza a teljes $V$ csúcshalmazt. Ez ugyan megfelel a definíciónak, de semmire sem tudjuk alkalmazni. Annál jobban tudunk alkalmazni egy fafelbontást, minél kisebb a favastagsága. Éppen ezért vetődik fel az a kérdés, hogy egy gráfnak létezik-e legfeljebb $k$ vastagságú fafelbontása. Ennek megválaszolása általában NP-teljes feladat. $k \leq 4$ értékekre viszont ismert lineáris futási idejű algoritmus, bár a konstans tényező nagy.

**Amit tudunk:** A favastagság értéke akkor és csak akkor 1, ha a gráf egy erdő, illetve összefüggőség esetén egy fa. A $k = 2$ favastagságú gráfok azok, amelyek az alábbi két átalakítás véges sok alkalmazásával leegyszerűsíthetőek egy csúccsá:

- Egy elsőfokú csúcs eltávolítása a gráfból
- Két, egy másodfokú csúcsnál találkozó él összehúzása

**Tétel:** [4]Minden $k$ konstans esetén létezik $O(n \cdot log\, n)$ futási idejű algoritmus, ami egy adott $G = (V, E)$ bemenettel azt adja ki outputként, hogy $G$ favastagsága nagyobb, mint $k$, vagy pedig megadja $G$-nek egy fafelbontását legfeljebb $3k + 2$ favastagsággal.

A fent említett algoritmus futási ideje sajnos exponenciális $k$-ban. A legtöbb fafelbontást megadó algoritmus szeparátorok sorozatos keresésén alapul. A szeparátorok olyan csúcshalmazok, amelyek elhagyásával a gráf nem marad összefüggő.

**Egy alternatív definíció:.** Először be kell vezetnünk egy új fogalmat: Egy gráfot merevkörűnek nevezünk, ha minden feszített köre 3 hosszú. Ez azt jelenti, hogy minden 3-nál hosszabb körében van átló. A $G(V, E)$ gráf egy háromszögelésén egy $H(V, F)$ merevkörű gráfot értünk, ahol $E \subseteq F$.

**Lemma:** [5]Legyen $G$ egy tetszőleges gráf, $\mathcal{H}$pedig $G$ összes háromszögelésének a halmaza. Ekkor $G$ favastagsága $min_{H \subseteq \mathcal{H}} \omega(H) - 1$.

Ez tekinthető a favastagság egy ekvivalens definíciójának is. Nyilvánvaló, hogy ha $G$ merevkörű, akkor $\tau(G) = \omega(G) - 1$. Ha nem, akkor keresnünk kell egy olyan háromszögelést, amelynek a maximális klikk mérete a lehető legkisebb. Vannak olyan algoritmusok, amelyek eldöntik, hogy egy gráf merevkörű-e, illetve „Nem” válasz esetén megadják annak egy háromszögelését. Az ilyen algoritmusok a csúcsok szimpliciális sorrendjén alapszanak, illetve azon, hogy egy gráf pontosan akkor merevkörű, ha a csúcsainak létezik szimpliciális sorrendje.

**Definíció:** A gráf $n$ darab csúcsának a $v_1, v_2, ..., v_n$ sorrend egy szimpliciális sorrendje, ha minden $v_i$ esetén $\delta_{G[v_i,...,v_n]}(v_i)$ egy klikket alkot. Itt $\delta_{G[v_i,...,v_n]}(v_i)$ a $v_i$ csúcs $v_i, ..., v_n$ csúcsok között lévő szomszédainak a feszített részgráfját jelöli.

**Alsó korlátok.**

- $\omega(G)$: Mivel az összes $G$-beli klikk megtalálható $G$ összes háromszögelésében is.

- $\delta(G)$: Scheffler bizonyította be, hogy minden legfeljebb $k$ favastagságú gráfnak létezik olyan csúcsa, amelynek fokszáma nem nagyobb, mint $k$.

- $\gamma_R(G)$: Ramachandramurthi vezette be a következő paramétert, amelyről belátta, hogy alsó korlátja a favastagságnak:
  $\gamma_R(G) := min_{v \neq w \in V, \{v,w\} \notin E} max(d(v), d(w))$. Látható, hogy ez az érték pontosan akkor $n-1$, ha $G$ teljes. Ha $G$ nem teljes, akkor $\gamma_R(G)$-t egy nem-szomszédos csúcspár határozza meg, tehát a második legkisebb fokszám ($\delta_2(G)$) is alsó korlátja. Tehát igazak a következő egyenlőtlenségek: $\delta(G) \leq \delta_2(G) \leq \gamma_R(G) \leq \tau(G)$. Ezen négy paraméter számolható polinomiális idő alatt.

A Maximum Cardinality Search (MCS) során a gráf csúcsait járjuk be úgy, hogy minden soron következő csúcs egy olyan addig még nem látogatott csúcs, melynek a már látogatottak közül a lehető legtöbb szomszédja van. Az eljárás tetszőleges csúcsból indulhat. Miután az összes csúcsot meglátogattuk, előáll egy MCS-sorrend. Egy MCS-sorrendben egy $v$ csúcs látogatott fokszáma a nála kisebb indexű szomszédainak a száma. Ha $\psi$-vel jelöljük az egyik MCS-sorrendet, akkor $mcslb_{\psi}(G)$ jelöli az ehhez a sorrendhez tartozó legnagyobb látogatott fokszámot $G$-ben.

**Tétel (Lucena):** [5]Legyen $G$ egy gráf, $\psi$ egy MCS-sorrend.
Ekkor $mcslb_{\psi}(G) \leq \tau(G)$.

- A fenti tétel alapján új alsó korlátot kaptunk:
  $MCSLB(G) := max_{\psi} mcslb_{\psi}(G) \leq \tau(G)$. Ezzel azonban az a gond, hogy az $MCSLB(G) \leq k$? kérdés eldöntése $k \geq 7$ esetén NP-teljes.

Legyen adott a $G$ gráf egy optimális fafelbontása, és legyen $H$ a gráf egy részgráfja vagy minorja. Ha a fa minden halmazából kivesszük a $H$-ban nem szereplő csúcsokat, illetve az összehúzott csúcsokat a megfelelő újakkal helyettesítjük, akkor a $H$ egy fafelbontását kapjuk. Ebből következik, hogy minden olyan paraméter, amely alsó korlátja a favastagságnak, kiterjeszthető a $G$ részgráfjaira és minorjaira vonatkozó paraméterek maximumára.

- $\delta D(G)$: A maximális legkisebb fokszám $G$ összes részgráfjára. Ez polinomiális időben számolható, például azzal az eljárással, amelyben minden lépésben elvesszük az éppen legkisebb fokú csúcsot.

**Tétel (Szekeres-Wilf):** [5]$\delta D(G) \geq \chi(G) - 1$.

Ebből persze az is következik, hogy $\delta D(G) \geq \omega(G) - 1$. Tehát kaptunk egy olyan alsó korlátot, amely nem rosszabb, mint $\omega(G)$, ráadásul könnyebben is számítható.

Hasonlóan értelmezzük a $\delta_2 D(G)$ és a $\gamma_R D(G)$ paramétert. Az előbbi számítása megy polinomiális időben, míg az utóbbié NP-nehéz.

- $\delta C(G)$: A fenti definíció, de részgráf helyett minor szerepel benne. Ez a paraméter azonban nehezebben számítható.

**Tétel (Bodlaender):** [5]Legyen $G = (V, E)$ egy gráf, $\tau(G) \leq k$, és $\{v, w\} \notin E$. Ha létezik legalább $k + 2$ csúcsdiszjunkt út $v$ és $w$ között, akkor $\{v, w\} \in F$ minden olyan $H = (V, F)$ esetén, mely $G$-nek háromszögelése, továbbá $\omega(H) \leq k$.

Ha tudjuk, hogy $\tau(G) \leq k$ és létezik $k + 2$ csúcsdiszjunkt út $v$ és $w$ között, akkor $\{v, w\}$ hozzáadása $G$-hez, nem ront.

Az alábbi algoritmussal javíthatunk már meglévő alsó korlátokon.

1. Tekintünk egy alsó korlátot: Jelölje ezt $l$. például: $\delta C(G)$

2. Feltesszük, hogy $\tau(G) \leq l$. (Ez $l$ alsó korlát volta miatt valójában azt jelenti, hogy $\tau(G) = l$.) Hozzáadunk $G$-hez egy olyan $\{v, w\}$ élet, ahol $v$ és $w$ között van legalább $l+2$ csúcsdiszjunkt út. Az így kapott gráfot jelölje $G'$.

3. Ha egy $G'$-re vonatkozó alsó korlát számítással azt kapjuk, hogy $\tau(G') > l$, akkor a $\tau(G) \leq l$ feltevésünk hamis volt, vagyis $\tau(G) \geq l+1$. Ezzel egy jobb alsó korláthoz jutottunk.

4. Addig folytatjuk az eljárást, ameddig $\tau(G') > l$ fennállását már nem tudjuk igazolni. Ez persze nem jelenti azt, hogy $\tau(G') = l$ lenne.

Ezzel az algoritmussal az a baj, hogy túl időigényes annak a leellenőrzése, hogy létezik-e két csúcs között $l + 2$ csúcsdiszjunkt út. Ehelyett szokás azt nézni, hogy van-e két csúcsnak legalább $l + 2$ közös szomszédja.

Meg kell jegyezni, hogy az itt taglalt alsó korlátok síkgráfok esetén elég rosszak.

## 10.1. Egy újabb saját eredmény

A fentiekben az is kiderült, hogy a fafelbontásoknál kitüntetett szerepe van a merevkörű gráfoknak. Az általam vizsgált problémánál előkerül a fa hatványgráfja. Bebizonyítottam, hogy ez mindig merevkörű. Ez pedig biztató a továbbiakra nézve.

**Tétel:** A fák hatványgráfjai mindig merevkörűek.

**Bizonyítás:** Azt mutatom meg, hogy a hatványgráfban nem lehet 3-nál hosszabb feszített kör. Az általánosság megsértése nélkül tekintsük a $d$-edik hatványgráfot. Egy-egy él pontosan akkor van behúzva, ha a két végpontjának a fabeli távolsága legfeljebb $d$. Tegyük fel indirekt, hogy van a gráfban egy legalább 4 hosszúságú feszített kör. Nézzük meg, hogy hogyan nézhet ki a benne szereplő csúcsok által feszített részfa az eredeti fában. Legyenek a körön szereplő csúcsok az egyik bejárási sorrendben $A$, $B$, $C$,..., $Z$. Nem tudjuk, hogy pontosan hányan vannak, az egyszerűség miatt jelöljük most az utolsót $Z$-vel. Mivel fáról van szó, két csúcs között egy és csak egy út van, annak a hosszáról ad információt a hatványgráfokban behúzott, illetve be nem húzott él. Tekintsünk két tetszőleges csúcsot ($v_1$és $v_2$) és a köztük lévő utat. Nézzük meg, hogy hogyan néz ki az a két út, amely egy tetszőleges $v_3$ csúcs és ezen kettő között fut. A $v_1 - v_3$ és a $v_2 - v_3$ útnak van közös pontja, hiszen $v_3$ is az. $v_1$-ből el tudunk jutni $v_2$-be úgy, hogy elmegyünk a $v_1 - v_3$ úton az első közös pontig, majd rátérünk a $v_3 - v_2$ útra. Az utak egyértelműsége miatt ez azonban a már korábban megtalált út.

A fa körmentessége miatt a $v_1 - v_3$ be nem járt vége és a $v_3 - v_2$ be nem járt eleje egybe is esik. (Az első közös csúcs és $v_3$ között is csak egyetlen út van.) Szemléletesen azt mondhatjuk, hogy a három csúcs által feszített részfa egy $Y$ formát alkot, ahol $v_1$, illetve $v_2$ a két felső, $v_3$ pedig az alsó végpont. Elvileg elfajulás is előfordulhat, amikor az egyik szár 0 hosszú, ekkor az egyik csúcs a másik kettő közötti út egyik pontja. Térjünk vissza a hatványgráfban feltételezett körhöz. $A$ össze van kötve $B$-vel, $B$ $C$-vel, de $A$ $C$-vel nem. Ezek együttes teljesülésének szükséges feltétele, hogy a részfájukban a $B$-hez vezető szár rövidebb legyen, mint a másik kettő külön-külön. Csak így biztosítható, hogy az $A - C$ út hosszabb legyen az $A - B$ és a $B - C$ útnál. Ez az érvelés érvényes minden másik 3, a körön szomszédos csúcsra. Így tehát a $B, C, D$-hez tartozó $Y$ formában a $C$-hez tartozó szár a legrövidebb. Ebből következik az is, hogy az $A - D$ út hosszabb, mint az $A - C$, és persze az $A - B$ út. Ezt a gondolatmenetet alkalmazzuk az összes, a körön szomszédos hármasra. Végül kiderül, hogy az $A - Z$ út távolságának is hosszabbnak kell lennie az $A - C$ távolságánál. Erről tudjuk, hogy hosszabb $d$-nél, ezért az $A - Z$ útnak is hosszabbnak kellene lennie $d$-nél. Így viszont nem lehetnek összekötve a $d$-edik hatványgráfban. Ez mutatja, hogy téves volt a feltevésünk, a hatványgráfban nem lehet 3-nál hosszabb feszített kör, azaz a fák hatványgráfjai valóban mindig merevkörűek.

# 11. Köszönetnyilvánítás

Végezetül szeretném megköszönni két témavezetőmnek, Dr. Tuza Zsoltnak és dr. Hujter Mihálynak, hogy észrevételeikkel és javaslataikkal segítették a munkámat. Továbbá köszönöm nekik, hogy figyelmembe ajánlottak számos, a témához kapcsolódó publikációt.

## 12. Felhasznált irodalom


1. Shao Z d, The $L(d_1, d_2, d_3)-$labeling on graphs, Journal of Nanjing University Mathematical Biquarterly, Vol.21, N, 2004

2. H Liao, C H Yang, R K Yeh, Graphs labelings with three levels of constraints, 2008

3. J W Huang, R K Yeh, A study of the edge span of distance three labeling, India-Taiwan Conference on Discrete Mathematics, NTU, November 9-12., 2009

4. H L Bodlaender, A tourist guide through treewidth, Acta Cybernetica, Vol.11, No.1-2, 1993

5. I V Hicks, A M C A Koster, E Kolotoğlu,Branch and tree decomposition techniques for discrete optimization, Tutorials in Operations Research Informs, 2005

6. Shao Z d, The $L(3, 2, 1)-$labeling problem on graphs, Mathematica Applicata, 2004, 17(4), 596-602

7. J Clipperton, J Gehrtz, Z Szaniszlo, D Torkorno, $L(3, 2, 1)-$labeling of simple graphs, VERUM, Valpariso University, 2006

8. W K Hale, Frequency assignment: theory and application, Proc. IEEE, 68 (1980), 1497-1514.