Bizonyítandó teljes indukcióval, hogy $n = 2, 3, 4, ...$ esetén

$$1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + ... + \sqrt[3]{n} < \sqrt[3]{n^4}$$

Először a $n = 2, 3, 4, 5$ eseteket ellenőrizzük:

$$\begin{aligned} 1 + \sqrt[3]{2} &\approx 2.3 \\ \sqrt[3]{2^4} &\approx 2.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} &\approx 3.7 \\ \sqrt[3]{3^4} &\approx 4.3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4} &\approx 5.3 \\ \sqrt[3]{4^4} &\approx 6.4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{5} &\approx 7 \\ \sqrt[3]{5^4} &\approx \ 8.6 \end{aligned}$$

Továbbá $n = 6, 7, ...$ esetén az

$$a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$$

azonosság alapján

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{n^4} - \sqrt[3]{(n-1)^4} &= \frac{n^4 - (n-1)^4}{\sqrt[3]{n^8} + \sqrt[3]{n^4(n-1)^4} + \sqrt[3]{(n-1)^8}} \\ &> \frac{4n^3 - 6n^2 + 4n - 1}{3 \cdot \sqrt[3]{n^8}} > \frac{3n^3 + n^3 - 6n^2 + 4n - 24}{3 \cdot \sqrt[3]{n^8}} \\ &= \sqrt[3]{n} + \frac{n^3 - 6n^2 + 4n - 24}{3 \cdot \sqrt[3]{n^8}} = \sqrt[3]{n} + \frac{(n-6)\left(n^2+4\right)}{3 \cdot \sqrt[3]{n^8}} \geq \sqrt[3]{n} \end{aligned}$$

Tehát ha n értéke növekszik eggyel, akkor a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldala kevesbé növekszik, mint a jobb oldala.