Teljes indukcióval bizonyítandó $n = 3, 4, 5, ...$ esetére, hogy

$$\sum_{k=1}^{2^n+2^{n-2}} \frac{1}{k} < n$$

Legyen $n = 2, 3, ...$ esetén

$$a_n = \sum_{k=1}^{2^n+2^{n-2}} \frac{1}{k}$$

Az $n = 2$ és az $n = 3$ esetekben ez van:

$$\begin{aligned} a_2 &= \sum_{k=1}^{2^2+1} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{137}{60} < 2.3 \\ a_3 &= \sum_{k=1}^{2^3+2} \frac{1}{k} = a_2 + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \\ &< 2.3 + 0.2 + 0.15 + 0.125 + 0.12 + 0.1 = 2.995 \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy fennáll $a_n < n$ valamely $n \in \{3, 4, 5, ...\}$ esetén. Tehát

$$\sum_{k=1}^{2^n+2^{n-2}} \frac{1}{2k} < \frac{n}{2}$$

Ezt másképpen írva:

$$\sum_{k=4}^{2^n+2^{n-2}} \frac{1}{2k} < \frac{n}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{6n-11}{12}$$

Meg kell mutatnunk, hogy $a_{n+1} < n + 1$. Felhasználjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 &< \sum_{k=4}^{2^n+2^{n-2}} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) < \sum_{k=4}^{2^n+2^{n-2}} \left(\frac{1}{2k-2} - \frac{1}{2k}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=4}^{2^n+2^{n-2}} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{2} \sum_{k=4}^{2^n+2^{n-2}} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - 2^{-2^n-2^{n-2}}\right) < \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Ezért

$$\sum_{k=4}^{2^n+2^{n-2}} \frac{1}{2k-1} < \frac{6n-11}{12} + \frac{1}{6} = \frac{2n-3}{4}$$

Összeadással ezt nyerjük:

$$\sum_{k=7}^{2^{n+1}+2^{n-1}} \frac{1}{k} < \frac{6n-11}{12} + \frac{2n-3}{4} = n - \frac{5}{3} < n - 1.5$$

Végül a következő sor teszi teljessé az indukciós bizonyítást:

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^{2^{n+1}+2^{n-1}} \frac{1}{k} < a_2 + \frac{1}{6} + n - 1.5 < 2.3 + 0.2 + n - 1.5 = n + 1$$

Megjegyzés: Mivel

$$\sum_{k=2^{n-1}+2^{n-3}+1}^{2^n+2^{n-2}} \frac{1}{k}$$

alsó közelítő összeg az

$$\int_{2^{n-1}+2^{n-3}}^{2^n+2^{n-2}} \frac{1}{x}\ dx$$

integrálra, ezért

$$\sum_{k=2^{n-1}+2^{n-3}+1}^{2^n+2^{n-2}} \frac{1}{k} \leq \ln\left(2^n + 2^{n-2}\right) - \ln\left(2^{n-1} + 2^{n-3}\right) = \ln 2 \approx 0.693\,15$$

Következésképpen $n = 3, 4, 5, ...$ esetére

$$\sum_{k=11}^{2^n+2^{n-2}} \frac{1}{k} \leq (n-3)\ln 2$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2^n+2^{n-2}} \frac{1}{k} &\leq a_3 + (n-3)\ln 2 \\ &= \frac{137}{60} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + (n-3)\ln 2 < 0.7n + 0.85\end{aligned}$$

Látnivaló, hogy ez némileg erősebb állítás, mint az eredeti, hiszen $n \geq 3$ miatt $0.7n + 0.85 < n$. Másrészt, ha azt használjuk fel, hogy

$$\sum_{k=2^{n-1}+2^{n-3}}^{2^n+2^{n-2}-1} \frac{1}{k}$$

felső közelítő összeg ugyanarra az integrálra, azt kapjuk $n = 3, 4, 5, ...$ esetére, hogy

$$\sum_{k=10}^{2^n+2^{n-2}-1} \frac{1}{k} \geq (n-3)\ln 2$$

Ebből azt nyerjük, hogy

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2^n+2^{n-2}} \frac{1}{k} &\geq \frac{137}{60} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + (n-3)\ln 2 + \frac{1}{2^n + 2^{n-2}} \\ &> 0.69n + 0.649\end{aligned}$$