Bizonyítandó teljes indukcióval $n = 4, 5, 6, ...$ esetére, hogy

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + ... + \frac{1}{2^n - 5} + \frac{1}{2^n - 1} > \frac{n}{7}$$

Mivel

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} - \frac{4}{7} = \frac{24}{385} > 0$$

ezért $n = 4$ esetén fennáll a bizonyítandó egyenlőtlenség. A továbbiakban feltesszük, hogy valamely $n \geq 4$ egész számra már bizonyítottuk az egyenlőtlenséget. Az n-ről $(n+1)$-re való átmenetkor a bal oldal növekedése:

$$\frac{1}{2^n + 3} + \frac{1}{2^n + 7} + ... + \frac{1}{2^n + 2^{n-1} - 1} + \frac{1}{2^n + 2^n + 3} + ... + \frac{1}{2^{n+1} - 5} + \frac{1}{2^{n+1} - 1}$$

Ez összesen $4 \cdot 2^{n-4}$ darab tag. Itt az első 2^{n-4} darab tag összegét így becsülhetjük alulról:

$$2^{n-4} \cdot \frac{1}{2^n + 2^{n-2} - 1} = \frac{1}{16 + 4 - 2^{4-n}} > \frac{1}{16 + 4} = \frac{1}{20}$$

A következő 2^{n-4} darab tag összegét így becsülhetjük alulról:

$$2^{n-4} \cdot \frac{1}{2^n + 2^{n-1} - 1} = \frac{1}{16 + 8 - 2^{4-n}} > \frac{1}{16 + 8} = \frac{1}{24}$$

A következő 2^{n-4} darab tag összegét így becsülhetjük alulról:

$$2^{n-4} \cdot \frac{1}{2^n + 3 \cdot 2^{n-1} - 1} = \frac{1}{16 + 12 - 2^{4-n}} > \frac{1}{16 + 12} = \frac{1}{28}$$

Az utolsó 2^{n-4} darab tag összegét így becsülhetjük alulról:

$$2^{n-4} \cdot \frac{1}{2^{n+1} - 1} = \frac{1}{32 - 2^{4-n}} > \frac{1}{16 + 8} = \frac{1}{32}$$

Mivel

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{24} + \frac{1}{28} + \frac{1}{32} - \frac{1}{7} = \frac{53}{3360} > 0$$

és mivel a bizonyítandó egyenlőtlenségben az n-ről $(n+1)$-re való átmenetkor a jobb oldal növekedése $\frac{1}{7}$, ezért teljes indukcióval a bizonyítás kész.

Következmény: A fent bizonyított egyenlőtlenségnek triviális következménye, hogy $n = 4, 5, 6, ...$ esetén

$$\begin{aligned} \frac{n}{7} - \frac{1}{3} &< \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + ... + \frac{1}{2^n - 5} + \frac{1}{2^n - 1} < \\ &< \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14} + ... + \frac{1}{2^n - 6} + \frac{1}{2^n - 2} \end{aligned}$$

azaz

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+...+\frac{1}{2^{n-1}-3}+\frac{1}{2^{n-1}-1}>\frac{2n}{7}-\frac{2}{3}$$

Ez utóbbiból viszont az látszik, hogy

$$\begin{aligned}\frac{2n}{7}-1 &< \frac{1}{5}+\frac{1}{7}+...+\frac{1}{2^{n-1}-3}+\frac{1}{2^{n-1}-1}\\ &< \frac{1}{4}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{2^{n-1}-4}+\frac{1}{2^{n-1}-2}\end{aligned}$$

azaz

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2^{n-2}-2}+\frac{1}{2^{n-2}-1}>\frac{4n}{7}-2$$