Bináris és relaxált hátizsák

Hujter Mihály (`http://math.bme.hu/~hujter`)

Adottak pozitív egész számok. Elsőként n, melynek értéke a zárthelyin vagy vizsgán 5 és 8 közötti. Aztán adott n darab számpár pozitív számokból. Például $n = 6$ esetén: $\binom{8}{6}, \binom{4}{5}, \binom{6}{8}, \binom{5}{4}, \binom{9}{7}, \binom{2}{3}$. A számpárok első elemét euróban, a a másikat kilóban értjük. Tehát például az $\binom{5}{4}$ pár jelentése: egy olyan tárgy, melynek a haszna 5 euró, a súlya pedig 4 kiló. Adott továbbá egy b pozitív egés szám is. Ez általában kisebb, mint a felsorolt n darab súly összege. Példánkban legyen $b = 25$. Úgy fogjuk fel, hogy van egy hátizsákunk, melybe legfeljebb b kiló pakolható. Ki kell válogatnunk a tárgyak közül néhányat, melyek összsúlya nem több, mint b, de az összhaszna a lehető legtöbb. Ez az úgynevezett *bináris hátizsák* feladat. Azért bináris, mert mind az n darab tárgy esetében két-két lehetőségünk van: vagy kiválasztjuk, vagy nem.

Egészértékű lineáris programozási feladatként megfogalmazva: Ha a tárgyak sorszáma: $j = 1, 2, ..., n$, a j-edik tárgy haszna: c_j, a súlya a_j, akkor legyen $x_j = 1$, ha a tárgyat kiválasztjuk, legyen $x_j = 0$, ha a tárgyat nem választjuk ki.

Tehát ismeretlenek: $x_j \in \{0, 1\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Feltétel: $\sum a_j x_j \leq b$. Célfüggvény: $\sum c_j x_j$, amit maximalizálunk.

Az a gond a bináris hátizsák feladattal, hogy más $n = 100$-ra vagy 120-ra is reménytelen az összes lehetőség megvizsgálása számítógéppel, hiszen 2^n darab megoldásjelöltet kellene kipróbálni. Hogy mégis kezelni tudjunk ilyen feladatokat, először egy kicsit módosított változatot tekintünk.

Az úgynevezetett *relaxált hátizsák* feladat esetében az egyik, de csak az egyik, x_j-nek megengedünk a 0 és 1 értéken kívül is valamely 0 és 1 közötti értéket is. Ez a 0 és 1 között érték egy hányados lehet, melyben a nevező valamely a_m, a számláló pedig egy olyan pozitív szám, mely a_m-nél kisebb és b-nél sem nagyobb.

Minden lényegesen leegyszerűsödik, ha feltesszük, hogy a tárgyaink olyan sorrendben adottak, hogy a c_j/a_j sorozat monoton fogyó. Ekkor keresünk egy olyan k számot, melyre $\sum_{j=1}^{k} a_j < b$, de $\sum_{j=1}^{k+1} a_j > b$. Itt $k = 0$ is lehetséges, és ilyenkor a $\sum_{j=1}^{0}$ összeg értéke nulla. Nyilván $k < n$.

A relaxált hátizsák feladat optimális megoldását így készíthetjük el: Ha találunk a monoton fogyó c_j/a_j sorozathoz a fenti értelemben egy k számot, akkor legyen

$$\begin{aligned} x_j &= 1, \quad \text{ha } j = 1, 2, \ldots, k \\ x_{k+1} &= \frac{b - \sum_{j=1}^{k} a_j}{a_{k+1}} \\ x_j &= 0, \quad \text{ha } j = k+2, k+3, \ldots, n \end{aligned}$$

Ha pedig nem található k szám a fenti értelemben, akkor legyen

$$\begin{aligned} x_j &= 1, \quad \text{ha } \sum_{p=1}^{j} a_p \leq b \\ x_j &= 0, \quad \text{máskülönben} \end{aligned}$$

Viszonylag könnyen belátható: így az relaxált hátizsák feladat optimális megoldását kaptuk. Sőt, ha az így definiált x_j számokra kiszámítjuk a $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j$ összeget, és azt egész számra lefelé kerekítjük, akkor legfeljebb ennyi lehet a bináris hátizsák feladat optimális célfüggvényértéke is. Példánk esetében a tárgyakat monoton fogyó c_j/a_j sorozatba rendezve és a

	c_1	c_2	$\cdots$	c_n
b	a_1	a_2	$\cdots$	a_n

séma szerint elrendezve ezt kapjuk:

	8	9	5	4	6	2
25	6	7	4	5	8	3

Ha a relaxált feladat megoldását is beírjuk a

	c_1	c_2	$\cdots$	c_n
b	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
	x_1	x_2	$\cdots$	x_n

sémába, akkor a példánk esetében ezt kapjuk:

	8	9	5	4	6	2
25	6	7	4	5	8	3
	1	1	1	1	3/8	0

A relaxált optimáis megoldás célfüggfényértékét lefele kerekítve ezt kapjuk:

$$8 + 9 + 5 + 4 + \left\lfloor \frac{3}{8} \cdot 6 \right\rfloor = 28$$

Most rátérve a bináris feladatra, ebből az utolsó táblázatból azt látjuk, hogy a bináris feladat optimális megoldása legalább $8+9+5+4=26$ és legfeljebb 28. A bináris feladatra vonatkozó információt a következő táblázatos formában rögzítjük:

26<28	8	9	5	4	6	2
25	6	7	4	5	8	3

Az eddig megtalált lehető legjobb bináris célfüggvényérték 26 volt, tehát a továbbiakban csak olyan megoldások keresésére szoritkozunk, ahol a bináris célfüggvényérték a 27,28 számok valamelyike lesz. Ehhez okvetlenül szükséges, hogy legalább egy olyan x_j értéke 0 legyen, mely x_j értéke az eddig megtalált legjobb bináris megoldásban pozitív volt. Jelen esetben tehát vagy $x_1=0$, vagy $x_1=1$, $x_2=0$, vagy $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=0$, vagy $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=1$, $x_4=0$, vagy $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=1$, $x_4=1$, $x_4=0$ lesz. Ezt az öt esetet a következő négy táblázatban írhatjuk fel:

	8	9	5	4	6	2
25	6	7	4	5	8	3
	0					

	8	9	5	4	6	2
25	6	7	4	5	8	3
	1	0				

	8	9	5	4	6	2
25	6	7	4	5	8	3
	1	1	0			

	8	9	5	4	6	2
25	6	7	4	5	8	3
	1	1	1	0		

	8	9	5	4	6	2
25	6	7	4	5	8	3
	1	1	1	1	0	

Mind a négy esetben megoldhatjuk a megfelelő relaxált feladatot, és a bal felső sarokba beírhatjuk a célfüggvényértéket illetve a kétféle célfüggvényértéket azokban az esetekben, amikor $\left(b-\sum_{j=1}^{k} a_j\right) c_{k+1} \geq a_{k+1}$. Ezeket a táblazatokat kapjuk, melyekben az áttekinthetőség érdekében az újonnan kiszámított x_j-értékeket kisebb számjegyekkel írtuk be:

24	8	9	5	4	6	2
25	6	7	4	5	8	3
	0	1	1	1	1	1/3

23<24	8	9	5	4	6	2
25	6	7	4	5	8	3
	1	0	1	1	1	2/3

21<26	8	9	5	4	6	2
25	6	7	4	5	8	3
	1	1	0	1	7/8	0

28	8	9	5	4	6	2
25	6	7	4	5	8	3
	1	1	1	0	1	0

28	8	9	5	4	6	2
25	6	7	4	5	8	3
	1	1	1	1	0	1

Látjuk tehát, hogy a negyedik esetnél már sikerült megtalálni a 28-at, aminél jobb nem is lehetséges. Az alsó sorból olvashatjuk ki az optimális megoldást. (Az ötödik változatot már nem is kellett volna kiszámytanunk.)
Tekintsünk egy másik példát, ahol rögtön felírjuk a relaxált megoldásból származó adatokat is:

70<85	29	7	25	9	22	10	17
37	12	3	11	4	10	5	9
	1	1	1	1	7/10	0	0

Mivel öt darab x_j pozitív, ezért öt darab esetet kapunk:

	29	7	25	9	22	10	17
37	12	3	11	4	10	5	9
	0						

	29	7	25	9	22	10	17
37	12	3	11	4	10	5	9
	1	0					

	29	7	25	9	22	10	17
37	12	3	11	4	10	5	9
	1	1	0				

	29	7	25	9	22	10	17
37	12	3	11	4	10	5	9
	1	1	1	0			

	29	7	25	9	22	10	17
37	12	3	11	4	10	5	9
	1	1	1	1	0		

Sorban mindegyik esetben kiszámítjuk a relaxált megoldásokat és az azokhoz tartozó becsléseket:

73<85	29	7	25	9	22	10	17
37	12	3	11	4	10	5	9
	0	1	1	1	1	1	5/9

82<85	29	7	25	9	22	10	17
37	12	3	11	4	10	5	9
	1	0	1	1	1	1/5	0

77<84	29	7	25	9	22	10	17
37	12	3	11	4	10	5	9
	1	1	0	1	1	1	4/9

83	29	7	25	9	22	10	17
37	12	3	11	4	10	5	9
	1	1	1	0	1	0	0

80<83	29	7	25	9	22	10	17
37	12	3	11	4	10	5	9
	1	1	1	1	0	1	2/9

Látható, hogy a kiindulási 70-es optimumhoz képest az első esetben javulást találtunk 73-ra, a második esetnél ez tovább javult a 82-re, a harmadik esetnél nem volt további javulás, de a negyedik esetnél 83-ra javult az eddig megtalált bináris optimális megoldás, az ötödik eset pedig már kidobandó, hiszen az már a 83-hoz képest nem jelent javulást. A maradék négy esetben a legnagyobb felső becslés továbbra is 85. Tehát most 84-re vagy 85-re keresünk bináris megoldást. Kiindulunk az eddig megtalált legjobb megoldásból, azaz a fenti negyedik esetből. Világos, hogy az egyik újonnan beírt pozitív x_j kicserélendő nullára. De újonnan beírva csak az $x_5 = 1$-et találjuk pozitívan, tehát — legalábbis ezen az ágon — biztosan tudjuk, hogy $x_5 = 0$ lesz. Kidobjuk tehát a negyedik esetet, és helyette ezt számoljuk:

71<78	29	7	25	9	22	10	17
37	12	3	11	4	10	5	9
	1	1	1	0	0	1	4/9

Amint kiszámoltuk, ki is dobjuk, hiszen ebből az ágból legjobb esetben is csak 78 jöhet ki, pedig bennünket csak a legalább 84 érdekel. Versenyben marad tehát a fenti első három eset. Ezek közül tekintsük azt, amiből az elméletileg lehetséges legjobb megoldás, azaz a 85 kijöhet. Ilyen kettő is van. Vegyük bármelyiket, mondjuk az elsőt. Világos, hogy ha javítani akarunk, akkor legalább egy olyan x_j értékét 1-re kell vennünk, ami egyáltalán lehet 1-es, se a pillanatnyi relaxált megoldásban még nem egyes. Csak egy ilyen x_j-t találunk: $x_7 = 5/9$. Rögzítjük tehát az $x_7 = 1$ értéket, kidobjuk a tekintett első eset táblázatát, és helyette ezt számoljuk:

80	29	7	25	9	22	10	17
37	12	3	11	4	10	5	9
	0	1	1	1	1	0	1

De csak 80 jött ki! Kidobjuk tehát ezt az esetet. Marad ez a kettő:

82<85	29	7	25	9	22	10	17
37	12	3	11	4	10	5	9
	1	0	1	1	1	1/5	0

77<84	29	7	25	9	22	10	17
37	12	3	11	4	10	5	9
	1	1	0	1	1	1	4/9

Mivel a baloldali ágon még — elvben — kijöhet 85, ezt vizsgáljuk meg elsőként. Valamelyik újonnan pozitívvá vált x_j értékét nullára kell visszavennünk! Négy aleset lesz tehát:

	29	7	25	9	22	10	17
37	12	3	11	4	10	5	9
	1	0	0				

	29	7	25	9	22	10	17
37	12	3	11	4	10	5	9
	1	0	1	0			

	29	7	25	9	22	10	17
37	12	3	11	4	10	5	9
	1	0	1	1	0		

	29	7	25	9	22	10	17
37	12	3	11	4	10	5	9
	1	0	1	1	1	0	

Mind a négy alesetben elvégezzük tehát a szokásos számításokat:

70<81	29	7	25	9	22	10	17
37	12	3	11	4	10	5	9
	1	0	0	1	1	1	2/3

76<84	29	7	25	9	22	10	17
37	12	3	11	4	10	5	9
	1	0	1	0	1	4/5	0

73<82	29	7	25	9	22	10	17
37	12	3	11	4	10	5	9
	1	0	1	1	0	1	5/9

85	29	7	25	9	22	10	17
37	12	3	11	4	10	5	9
	1	0	1	1	1	0	0

A negyedik alesetnél megtaláltuk a lehető legjobbat! Itt a vége, fuss el véle!