

Mely mátrixok sorrend-felcserélhetőek — szorzás szempontjából — a következő mátrixszal:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Jelölje B a másik mátrixot. Mivel az AB és BA szorzat is létezik, ezért a B mátrix csak 2-szer 2-es lehet.

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Mármost

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} + 2b_{21} & b_{12} + 2b_{22} \\ 2b_{11} + 3b_{21} & 2b_{12} + 3b_{22} \end{bmatrix} \\ BA &= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} + 2b_{12} & 2b_{11} + 3b_{12} \\ b_{21} + 2b_{22} & 2b_{21} + 3b_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A következő egyenletrendszert nyerjük:

$$\begin{aligned} b_{11} + 2b_{21} &= b_{11} + 2b_{12} \\ b_{12} + 2b_{22} &= 2b_{11} + 3b_{12} \\ 2b_{11} + 3b_{21} &= b_{21} + 2b_{22} \\ 2b_{12} + 3b_{22} &= 2b_{21} + 3b_{22} \end{aligned}$$

Látható, hogy az első egyenlet azzal ekvivalens, hogy $b_{12} = b_{21}$. Ezt beírva a másik három egyenletbe:

$$\begin{aligned} b_{12} + 2b_{22} &= 2b_{11} + 3b_{12} \\ 2b_{11} + 3b_{12} &= b_{12} + 2b_{22} \\ 2b_{12} + 3b_{22} &= 2b_{12} + 3b_{22} \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlet azonosság. A középső egyenletből: $b_{11} = b_{22} - b_{12}$. Ezt beírva a felső egyenletbe szintén azonosságot nyerünk.

Válaszunk tehát:

$$B = \begin{bmatrix} c - b & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

ahol b és c tetszőlegesek.

Valóban:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c - b & b \\ b & c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b + c & b + 2c \\ b + 2c & 2b + 3c \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} c - b & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b + c & b + 2c \\ b + 2c & 2b + 3c \end{bmatrix} \end{aligned}$$