Műveletek komplex számokon

Komplex számokat *összeg-* vagy *szorzat-alak*ban szoktunk megadni: $z = x + iy$ illetve $z = |z|\, e^{i\varphi}$. Ha $y = 0$, akkor $z = x$ és $\varphi = 0$. Itt $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ és $\left|e^{i\varphi}\right| = 1$. Gyakori, hogy az $e^{i\varphi}$ komplex számot összeg-alakban írjuk: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. A

$$z = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

alakú felírást *trigonometrikus alak*nak is szokták nevezni. Ha $z = x + iy$, akkor x a z komplex szám valós része, y pedig a képzetes rész. Az i komplex szám neve: *imaginárius*, azaz *képzetes egység.* (A valós egység maga az 1 valós szám.) Míg a valós számok halmazát $\mathbb{R}$ betűvel, addig a komplex számok halmazát $\mathbb{C}$ betűvel szokás jelölni.

A komplex számok összeadásának definíciója:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + iy_1 \\ z_2 &= x_2 + iy_2 \\ & \quad \text{esetén} \\ z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \end{aligned}$$

Az összeadás *kommutatív* és *asszociatív*, azaz

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= z_2 + z_1 \\ (z_1 + z_2) + z_3 &= z_1 + (z_2 + z_3) \end{aligned}$$

Következésképpen kevesebb zárójellel is leírhatók a képletek, azaz

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + iy_1 \\ z_2 &= x_2 + iy_2 \\ & \quad \text{esetén} \\ z_1 + z_2 &= x_1 + x_2 + iy_1 + iy_2 \end{aligned}$$

Ha λ egy tetszőleges valós szám, akkor definíció szerint

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ & \quad \text{esetén} \\ \lambda z &= \lambda x + i(\lambda y) \end{aligned}$$

Érvényes a *disztributivitás*, azaz

$$\lambda(z_1 + z_2) = \lambda z_1 + \lambda z_2$$

továbbá $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ esetén

$$(\lambda_1 + \lambda_2)z = \lambda_1 z + \lambda_2 z$$

A $z = x + iy$ komplex szám *konjugált*ja: $\overline{z} = x + i(-y)$, amit a fentiek miatt így is írhatunk: $x - iy$. Általában ugyanis értelmezhető:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + iy_1 \\ z_2 &= x_2 + iy_2 \\ & \text{esetén} \\ z_1 - z_2 &= x_1 - x_1 + iy_1 - iy_2 \end{aligned}$$

A szorzás bevezetése előtt tisztázzuk, hogy az xy-koordinátarendszerben hol található az imaginárius egység, azaz i. Az a pont, melynek x-koodinátája 0 és y-koordinátája 1, hiszen $i = 0 + i \cdot 1$. Az origó — azaz 0 — körüli egységnyi sugarú körön, 1 radián szögmagasságban — tehát óraszámlapon a kismutató szerinti 1 óra után pár perccel — található: e^i. (Ezt definíciónak is tekinthetjük, bár az e^i komplex szám határértékekkel is definiálható.)

Most értelmezzük a komplex számok *szorzás*át. Axióma: $i \cdot i = -1$. Fent kívánjuk tartani a valós számoknál megszokott kommutativitást, asszociativitást, disztributivitást. Ezért így definiálódik a szorzás:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + iy_1 \\ z_2 &= x_2 + iy_2 \\ & \text{esetén} \\ z_1 z_2 &= x_1 x_1 - y_1 y_2 + ix_1 y_2 + ix_2 y_1 \end{aligned}$$

Geometriai jelentés: Tekintsük azt a háromszöget, melynek csúcsai: 0 és 1 és z_1. Az origó körül forgatva nyújtva vigyük a 0 és z_2 és z_3 csúcsú háromszögbe. Ekkor — ez geometriai eszközökkel megmutatható — z_3 nem lesz más, mint $z_1 z_2$.

A e^i komplex számhoz hasonlóan definiálhatjuk az $e^{i\varphi}$ komplex számot, csak a szöget nem 1 radiánnak, hanem φ radiánnak vesszük. Megmutatható, hogy

$$\begin{aligned} z_1 &= |z_1|\, e^{i\varphi_1} \\ z_2 &= |z_2|\, e^{i\varphi_2} \\ & \text{esetén} \\ |z_1 z_2| &= |z_1| \cdot |z_2| \\ z_1 z_2 &= |z_1 z_2|\, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned}$$

Továbbá

$$\begin{aligned} z &= x + iy = |z|\, e^{i\varphi} \\ & \text{esetén} \\ \overline{z} &= x - iy = |z|\, e^{-i\varphi} \end{aligned}$$

A fentiek alapján a *reciprok* és a *hatványozás* természetes módon értelmezhető. Reciprokkal való szorzás révén az *osztás* is definiálható.

Mindezen ismeretek rögzítésére feladatok következnek:

1. Felírandó összeg-alakban (azaz additív alakban): $(3-4i)^5$
Megoldás:

$$\begin{aligned}
(3-4i)^5 &= \left((3-4i)^2\right)^2(3-4i) = (3^2-4^2-2\cdot 3\cdot 4\cdot i)^2(3-4i) \\
&= (-7-24i)^2(3-4i) = ((-7)^2-(-24)^2+2\cdot 7\cdot 24\cdot i)(3-4i) \\
&= (-527+336i)(3-4i) = -237+3116i
\end{aligned}$$

2. Felírandó összeg-alakban: $14e^{i\frac{\pi}{3}}$
Megoldás:

$$14e^{i\frac{\pi}{3}} = 14(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}) = 7+i\sqrt{147}$$

3. Felírandó szorzat-alakban: $7-7i$
Megoldás:

$$\begin{aligned}
|7-7i| &= \sqrt{98} = 7\sqrt{2} \\
7-7i &= 7\sqrt{2}\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\
1-i &= \sqrt{2}\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\
&= \sqrt{2}\cos\varphi + i(\sqrt{2}\sin\varphi) \\
1 &= \sqrt{2}\cos\varphi \\
-1 &= \sqrt{2}\sin\varphi \\
-1 &= \tan\varphi \text{ és } \cos\varphi > 0 \\
\varphi &= \frac{7\pi}{4} \\
7-7i &= 7\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}
\end{aligned}$$

4. Felírandó szorzat-alakban: $\left(\sqrt{3}+3i\right)^{33}$

Megoldás:

$$
\begin{aligned}
\left|\sqrt{3}+3i\right| &= \sqrt{3+3^2}=\sqrt{12} \\
\sqrt{3}+3i &= \sqrt{12}(\cos\varphi+i\sin\varphi) \\
&= \sqrt{12}\cos\varphi+i(\sqrt{12}\sin\varphi) \\
\sqrt{3} &= \sqrt{12}\cos\varphi \\
3 &= \sqrt{12}\sin\varphi \\
\sqrt{3} &= \tan\varphi \text{ és } \cos\varphi>0 \\
\varphi &= \frac{\pi}{3} \\
\sqrt{3}+3i &= \sqrt{12}(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}) \\
\left(\sqrt{3}+3i\right)^{33} &= \left(\sqrt{12}\right)^{33}(\cos 11\pi+i\sin 11\pi) \\
&= 12^{16}\sqrt{12}(-1) \\
&= -12^{16}\sqrt{12}
\end{aligned}
$$

5. $\left|(5+12i)^{14}\right|=?$
Megoldás:

$$
\begin{aligned}
|5+12i| &= \sqrt{5^2+12^2}=13 \\
\left|(5+12i)^{14}\right| &= 13^{14}
\end{aligned}
$$

6. Kiszámítandó a következő konjugáltnak az összeg-alakja: $\overline{5-4i+6e^{i\frac{\pi}{3}}}$
Megoldás:

$$
\begin{aligned}
6e^{i\frac{\pi}{3}} &= 6\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=3+i\sqrt{27} \\
\overline{5-4i+6e^{i\frac{\pi}{3}}} &= \overline{5-4i+3+i\sqrt{27}} \\
&= \overline{8-4i+i\sqrt{27}}=8+4i-i\sqrt{27} \\
&= 8+i\left(4-\sqrt{27}\right)
\end{aligned}
$$

7. $\frac{1-i}{1+i}=?$

Megoldás:

$$
\begin{aligned}
\frac{1-i}{1+i} &= x+iy \\
1-i &= (x+iy)(1-i) \\
&= x+y+i(y-x) \\
1 &= x+y \\
-1 &= x-y \\
x &= 0 \quad \text{és} \quad y=1 \\
\frac{1-i}{1+i} &= -i
\end{aligned}
$$

Másik megoldás, melyben a számlálót és a nevezőt is megszorozzuk a nevező konjugáltjával:

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)\,(1-i)}{(1+i)\,(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i$$