Gyökvonás komplex számokból

Összeg-alakban adott komplex számból – ha az eredményt is összeg-alakban akarjuk – a következő módszerrel vonhatunk gyököt: Adott egy $a + ib$ alakú komplex szám, ahol a, b valósak, és keresünk olyan x, y valós számokat, melyekre

$$a + ib = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i(2xy)$$

Ezért x^2 és $-y^2$ a következő valós együtthatós másodfokú egyenlet két megoldása:

$$\vartheta^2 - a\vartheta - \frac{b^2}{4} = 0$$

Ez utóbbi megoldásai (a kisebbik illetve a nagyobbik):

$$\frac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \qquad \text{ill.} \qquad \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

Tehát:

$$|x| = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \qquad |y| = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}$$

Ezekből x és y meghatározható ha még azt is figyelembe vesszük, hogy xy előjele megegyezik b előjelével.

Példa: $1 - i = (x + iy)^2$ megoldása:

$$\begin{aligned}
\vartheta^2 - a\vartheta - \frac{b^2}{4} &= 0 \\
\vartheta^2 - \vartheta - \frac{(-1)^2}{4} &= 0 \\
|x| &= \sqrt{\frac{\sqrt{2} + 1}{2}} \\
|y| &= \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}} iy = \sqrt{\frac{\sqrt{2} + 1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}} \\
&\text{vagy} \\
x + iy &= -\sqrt{\frac{\sqrt{2} + 1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}}
\end{aligned}$$

Példa: $-7-24i=(x+iy)^2$ megoldása:

$$\begin{aligned}
\vartheta^2-a\vartheta-\frac{b^2}{4} &= 0\\
\vartheta^2+7\vartheta-\frac{(-24)^2}{4} &= 0\\
\vartheta^2+7\vartheta-144 &= 0\\
|x| &= 3\\
|y| &= 4\\
x+iy &= 3+4i\\
&\ \text{vagy}\\
x+iy &= -3-4i
\end{aligned}$$

Ellenőrzés: $(3+4i)^2=-7+24i,\ \ (-3-4i)^2=-7+24i.$

Ha az $|z|\,e^{i\varphi}=(|w|\,e^{i\omega})^2$ egyenletet kell megoldanunk – azaz az eredményt szorzat-alakban várjuk –, akkor könnyebb dolgunk van:

$$\begin{aligned}
|z|\,e^{i\varphi} &= (|w|\,e^{i\omega})^2\\
|w| &= \sqrt{|z|}\\
\omega &= \frac{\varphi}{2}\ \text{vagy}\ \omega=\pi+\frac{\varphi}{2}
\end{aligned}$$

Példa: $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=(|w|\,e^{i\omega})^2$ megoldása: $|w|=\sqrt[4]{2}$ és $\omega=\frac{\pi}{4}$ vagy $\omega=\frac{5\pi}{4}$.

Harmadfokú egyenletet is meg tudunk oldani:

$$\begin{aligned}
a+ib &= (x+iy)^3=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)\\
a &= x^3-3xy^2\\
b &= 3x^2y-y^3
\end{aligned}$$

Nyerünk tehát egy egyenletrendszert, melyet általánosan is meg lehet oldani, de itt mi csak speciális esetekkel foglalkozunk.

Példa: Megoldandó: $1=(x+iy)^3$

Megoldás: Szorzatalakban könnyebb a megoldás:

$$\begin{aligned}
1 &= \left(|w|\, e^{i\omega}\right)^3 \\
&\text{esetén} \\
1 &= |w| \\
&\text{és} \\
e^{i3\omega} &= 1 \\
&\text{azaz} \\
\cos 3\omega &= 1 \quad \text{és} \quad \sin 3\omega = 0 \\
&\text{azaz} \\
\omega &= 0 \quad \text{vagy} \quad \omega = \frac{2\pi}{3} \quad \text{vagy} \quad \omega = \frac{4\pi}{3}
\end{aligned}$$

Ezért az eredeti egyenlet megoldása összegalakban:

$$\begin{aligned}
x + iy &= 1 \\
&\text{vagy} \\
x + iy &= \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&\text{vagy} \\
x + iy &= \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Ellenrőrzés: $1^3 = 1$, $\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1$, $\left(\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1$.

Másik példa: $2 - 11i = (x + iy)^3$

Megoldás: Mivel $|2 - 11i| = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$, ezért $|x + iy| = \sqrt[3]{5\sqrt{5}} = \sqrt{5}$. Így $x^2 + y^2 = 5$. A fentiek szerint:

$$2 = x^3 - 3xy^2 = x^3 - 3x(5 - x^2) = 4x^3 - 15x$$

azaz

$$\begin{aligned}
4x^3 - 15x - 2 &= 0 \\
(x - 2)\left(8x + 4x^2 + 1\right) &= 0
\end{aligned}$$

Egy lehetséges megoldás tehát: $x = 2$. Ezt visszaírva az eredeti egyenletbe:

$$\begin{aligned}
2 - 11i &= (x + iy)^3 = (2 + iy)^3 \\
&= 8 - 6y^2 + i(12y - y^3)
\end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned}
2 &= 8 - 6y^2 \\
-11 &= 12y - y^3
\end{aligned}$$

amiből

$$\begin{aligned} y^2 &= 1 \\ -11 &= y(12-y^2)11y \end{aligned}$$

azaz $y = 1$. Egy megoldásunk van tehát: $x + iy = 2 - i$. További megoldásokat kapunk

$$(2-i)e^{i\frac{2\pi}{3}} \qquad \text{és} \qquad (2-i)e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

alakban, azaz

$$\begin{aligned} (2-i)(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) &= (2-i)\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + i\left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} (2-i)(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) &= (2-i)\left(\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{-\sqrt{3}}{2} - 1 + i\left(-\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Ellenőrzés: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + i\left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)\right)^3 = 2-11i$, $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - 1 + i\left(-\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)\right)^3 = 2 - 11i$.