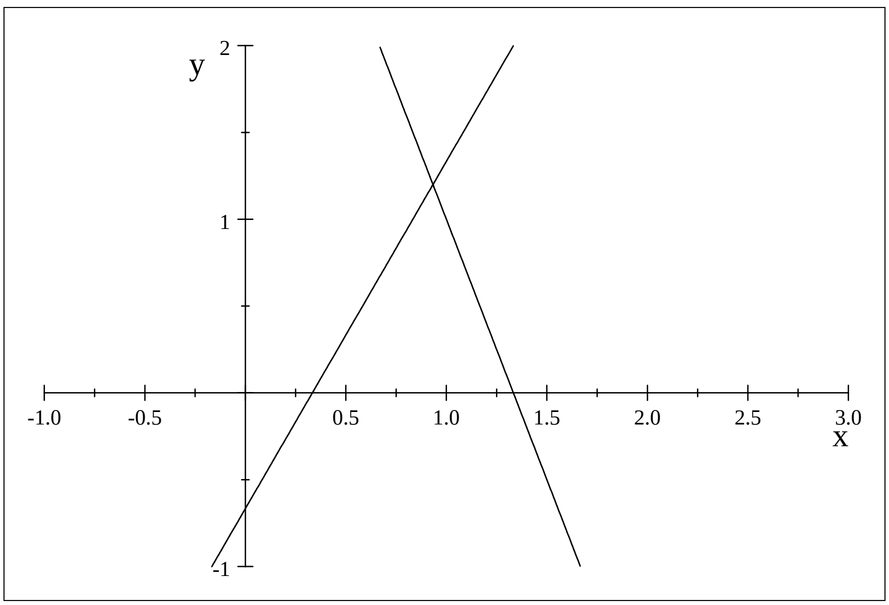
A 2010. október 11-i A3-Optimumszámítás előadáson megtárgyalt feladatok

F1. $x_1, x_2 \geq 0$; $3x_1 + x_2 \leq 4$; $x_1 - \frac{1}{2}x_2 \geq \frac{1}{3}$; $\left(x_1 + \frac{x_2}{4}\right) \to \max$
F2. $x_1, x_2, x_3 \geq 0$; $x_1 + 2x_2 \leq 5$; $x_2 + x_3 = 6$; $x_3 \to \min$
F3. $x_1, x_2 \geq 0$; $3x_1 + x_2 \leq 5$; $x_1 - x_2 \geq 2$; $(4x_1 + x_2) \to \min$
Mindhárom probléma lineáris programozási feladat.

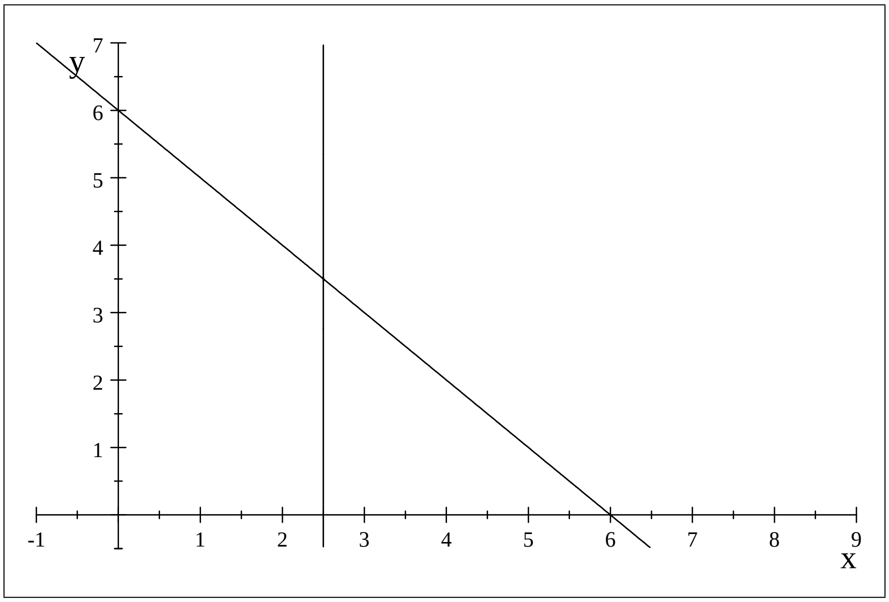
Az F1 és F3 feladatot meg tudjuk oldani grafikusan is. Sőt az F2 feladatot is, ha észrevesszük, hogy x_1 csak az első feltételben szerepel, és ezért ha kihagyjuk abból, akkor a maradék feltételekre az x_2 és x_3 koordinátatengelyekre vonatkoztatva grafikusan is kezelhetjük a feladatot.

Az F1 feladat grafikus megoldása: Az x_1 és x_2 koordinátatengelyek síkján ábrázoljuk a $3x_1 + x_2 = 4$ és $x_1 - \frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{3}$ egyenletű egyeneseket:



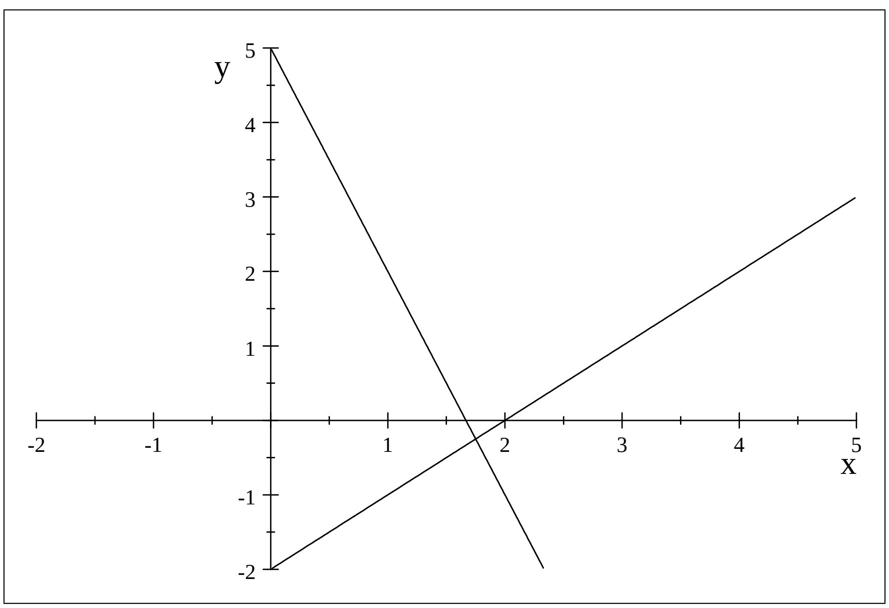
Az ábra közepén megjelenő háromszöglap jelenti a megengedett megoldások halmazát. A három csúcs közül a jobboldalin a legjobb a célfüggvény értéke. Tehát az optimális megoldás: $x^* = (\frac{4}{3}; 0)$.

Az F2 feladat grafikus megoldása: Az x_2 és x_3 koordinátatengelyek síkján ábrázoljuk a $2x_2 = 5$ és $x_2 + x_3 = 6$ egyenletű egyeneseket:



Az ábrán a két függőleges közti ferde szakasz jelenti a megengedett megoldásokat. A két végpont közül a jobb alsó végpontnál kedvezőbb a célfüggvény értéke. Ez tehát az optimális megoldás: $x_2^* = 2.5$ (hiszen $2x_2^* = 5$), $x_3^* = 3.5$ (hiszen $x_2^* + x_3^* = 6$), és x_1^* tetszőleges az $x_1^* \geq 0$ és $x_1^* + 2x_2^* \leq 5$ feltételek betartásával, azaz mégsem tetszőleges, mert csak 0 lehet.

Az F3 feladat grafikus megoldása: Az x_1 és x_2 koordinátatengelyek síkján ábrázoljuk a $3x_1 + x_2 = 5$ és $x_1 - x_2 = 2$ egyenletű egyeneseket:



Mivel a két ferde egyenes a vízszintes tengely alatt metszi egymást, és az origó alattinak az alsó, az origo felettinek is az alsó fele a megengedő oldala, ezért az F3 feladatra nincs nemnegatív megoldás!

A három feladat mindegyikét átírhatjuk standard alakra, azaz $Ax = b$, $x \geq 0$, $c^T x \to \max$ alakra is. Ármost

$$\begin{matrix} A & b \\ c^T & \end{matrix}$$

elrendezésben ezek az adatok a három feladatra:

F1.

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{-1}{2} & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix} & \end{matrix}$$

F2.

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} & \end{matrix}$$

F3.

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \end{matrix}$$

A fenti, mátrixos alakokból is látható és a rajzokról is leolvasható, hogy a feladatokhoz tartozó bázisok mátrixai a következők:

F1.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

F2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

F3.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

A bázismegoldások közül az F1 feladat esetében 3 darab megengedett, és azok közül egyetlen darab optimális. Az F2 feladat esetében 2 darab megengedett bázismegoldás megoldás van, és azok közül az egyik optimális. Az F3 feladat esetében nincs megengedett megoldás.

Az F2 feladatot megoldhatjuk szimplex módszerrel. Az elő-tabló a következő:

5	1	2	0	1
6	0	1	1	0
0	0	0	1	0

Azonban az egységmátrix alatt még nincs mindenhol nulla, ezért a legalsó sorból kivonjuk 1-szer a második sort, és indulhat a pivotálás:

5	1	(2)	0	1
6	0	1	1	0
-6	0	-1	0	0

$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$
$\frac{7}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	1	$\frac{-1}{2}$
$\frac{-7}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$

Most már kiolvasható az optimális megoldás: $x^* = (0; \frac{5}{2}; \frac{7}{2}; 0)$.

Az F1 feladatot megoldhatjuk kétfázisú szimplex módszerrel. Az elő-tabló az első fázishoz a következő:

4	3	1	1	0	0
$\frac{1}{3}$	1	$\frac{-1}{2}$	0	-1	1
0	0	0	0	0	1

Azonban az egységmátrix alatt még nincs mindenhol nulla, ezért a legalsó sorból kivonjuk 1-szer a második sort:

4	3	1	1	0	0
$\frac{1}{3}$	1	$\frac{-1}{2}$	0	-1	1
$\frac{-1}{3}$	-1	$\frac{1}{2}$	0	1	0

Indulhat az első fázis:

4	3	1	1	0	0
$\frac{1}{3}$	(1)	$\frac{-1}{2}$	0	-1	1
$\frac{-1}{3}$	-1	$\frac{1}{2}$	0	1	0

3	0	$\frac{5}{2}$	1	3	-3
$\frac{1}{3}$	1	$\frac{-1}{2}$	0	-1	1
0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	1

Heuréka! Véget ért az első fázis. Felírhatjuk a második fázis elő-tablóját:

3	0	$\frac{5}{2}$	1	3
$\frac{1}{3}$	1	$\frac{-1}{2}$	0	-1
0	-1	$\frac{-1}{4}$	0	0

A legalsó sort most is rendbe kell tenni; hozzáadjuk a felette lévőt:

3	0	$\frac{5}{2}$	1	3
$\frac{1}{3}$	1	$\frac{-1}{2}$	0	-1
$\frac{1}{3}$	0	$\frac{-3}{4}$	0	-1

Indulhat a második fázis! Lexikografikus módszer esetében kétféle pivotelem lehetséges:

3	0	$\left(\frac{5}{2}\right)$	1	(3)
$\frac{1}{3}$	1	$\frac{-1}{2}$	0	-1
$\frac{1}{3}$	0	$\frac{-3}{4}$	0	-1

A Bland-szabály szerint a bal oldali lesz a jó. Elvégezve a pivotálást:

$\frac{6}{5}$	0	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{5}$
$\frac{14}{15}$	1	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{-2}{5}$
$\frac{37}{30}$	0	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{-1}{10}$

Újra kell pivotálni:

$\frac{6}{5}$	0	1	$\frac{2}{5}$	$\left(\frac{6}{5}\right)$
$\frac{14}{15}$	1	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{-2}{5}$
$\frac{37}{30}$	0	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{-1}{10}$

1	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$	1
$\frac{4}{3}$	1	0	2	0
$\frac{4}{3}$	0	$\frac{5}{60}$	$\frac{1}{3}$	0

Most már kiolvasható az optimális megoldás: $x^* = (\frac{4}{3}; 0; 0; 1)$.

Az F3 feladatot megoldhatjuk kétfázisú szimplex módszerrel is és duál szimplex módszerrel is. A kétfázisúval kezdjuk. Az első fázis elő-tablója:

5	3	1	1	0	0
2	1	-1	0	-1	1
0	0	0	0	0	1

Ebből az első fázis induló tablója lesz, és indul az első fázis:

5	(3)	1	1	0	0
2	1	-1	0	-1	1
-2	-1	1	0	1	0

$\frac{5}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0
$\frac{1}{3}$	0	$\frac{-4}{3}$	$\frac{-1}{3}$	-1	1
$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0

Mivel tovább pivotálni nem lehet, de a bal alsó sarokba nem került nulla, ezért az eredeti feladatnak nincs megengedett megoldása, bármi is legyen a célfüggvénye.

Ugyanezt az F3 feladatot megoldjuk duál szimplex módszerrel is.

0	-4	-1
0	-1	0
0	0	-1
5	3	1
-2	-1	1

Indulhat is a pivotálás:

0	-4	-1
0	-1	0
0	0	-1
5	3	1
-2	(-1)	1

8	-4	-5
2	-1	-1
0	0	-1
-1	3	4
0	-1	0

Nem tudunk tovább pivotálni, pedig kellene. Nincs megengedett megoldás!