A lexikografikus szimplex algoritmus gyors definíciója

Adott m rangú, m sorú, n oszlopú A mátrixra és (alkalmas méretű) adott b,c vektorokra keresünk olyan m-szer m méretű B almátrixát A-nak, melyre egyrészt $B^{-1}b \geq 0$, másrészt $c_B^\intercal B^{-1}A \geq c^\intercal$, ahol $c_B^\intercal$ a $c^\intercal$ vektornak a B-re vonatkozó leszűkítése (ugyanazokra a komponensekre értve, ahogyan A leszűkül B-re).

Adott A, B, b, c esetén a szimplex tablót úgy értelmezzük, hogy egy $m+1$ sorú és $1+n$ oszlopú táblázatot készítünk így:

$$\begin{array}{ccc} B^{-1}b & | & B^{-1}A \\ --- & + & ------- \\ c_B^\intercal B^{-1}b & | & c_B^\intercal B^{-1}A - c^\intercal \end{array}$$

Csak akkor foglalkozunk vele, ha $B^{-1}b \geq 0$, és ha minden olyan $c_B^\intercal B^{-1}A - c^\intercal$ vektorbeli komponensnél, mely negatív, a negatív szám feletti, $B^{-1}A$-beli oszlopnak van pozitív komponense. Minden ilyen oszlopból (de bármelyikből, ha több is van) azt a pozitív p komponenset választhatjuk úgynevezett *pivotelem* gyanánt, melyre a szimplex tabló ezen sorát p-vel leosztva lexikografikusan a lehető legkisebb sorvektor keletkezik (a tekintett fix oszlopra vonatkozóan). (Két sorvektort úgy hasonlítunk össze, hogy balról sorban összehasonlítva a komponenseket, amelyik először kisebb lesz, az lesz a lexikografikusan kisebb sorvektor.) Ha ez a kiválasztott pivotlem a $B^{-1}A$ mátrix fentről q-adik sorának és k indexű oszlopának a kereszteződésében áll, akkor B-ből kirúgjuk balról számítva a q-adik sorszámú oszlopot, és helyette az A mátrix k-adik oszlopával pótoljuk ki az új B mátrixot. Aztán kezdődik minden elölről.

Példa. Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$c^\intercal = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Induláskor legyen mondjuk

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Most

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & \frac{-1}{7} \\ \frac{-1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

és így a szimplex tabló:

$$\begin{array}{cccccc} 13/7 & | & 3 & 2/7 & 1 & 0 \\ 2/7 & | & 0 & 10/7 & 0 & 1 \\ --- & + & -- & -- & -- & -- \\ -13/7 & | & -5 & -23/7 & 0 & 0 \end{array}$$

Itt most két lehetőség van a pivotelem megválasztására: vagy $p = 3$ vagy $p = \frac{10}{7}$. Az előbbi esetben az új B mátrix

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

lesz, míg az utóbbi esetben

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Az új szimplex tabló az előzőből *Gauss-Jordan elimináció* révén közvetlenül is megkapható, nem kell hozzá kiszámítani az új B^{-1} mátrixot. A p pivotelemet kell egyessét tenni, alatta-fölötte kinullázni. Például $p = 3$ esetén ez kapjuk:

$$\begin{array}{ccccc} 13/21 & | & 1 & 2/21 & 1/3 & 0 \\ 2/7 & | & 0 & 10/7 & 0 & 1 \\ --- & + & -- & -- & -- & -- \\ 26/21 & | & 0 & -59/21 & 5/3 & 0 \end{array}$$

Az újabb pivotelem $\frac{10}{7}$ lesz, és így az új tabló:

$$\begin{array}{cccccc} 3/5 & | & 1 & 0 & 1/3 & -1/15 \\ 1/5 & | & 0 & 1 & 0 & 7/10 \\ --- & + & -- & -- & -- & -- \\ 9/5 & | & 0 & 0 & 5/3 & 59/30 \end{array}$$

Ez már végső tabló! A kiolvasható optimális megoldás: $x^\mathsf{T} = [\ \frac{3}{5} \quad \frac{1}{5} \quad 0 \quad 0\ ]$, melyet ez az almátrix szolgáltat:

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Két megjegyzés a végére: A pivotálásos változatnál a szimplex tabló sorai felcserélődhetnek, de ennek nincs jelentősége. Ha a kiindulási szimplex tabló felső m sora mind lexikografikusan pozitív (azaz a csupanulla sor lexikografikusan kisebb mindegyiknél), akkor a szimplex tabló legalsó sora — megmutathatóan — lexikografikusan szigorúan monoton nő. Ezért az algoritmus befejezését sietendő többféle lehetséges pivotelem választhatósága esetén — azaz ha több oszlopban is találunk pivotelem-jelöltet — az a pivotelem javallandó, melyre a szimplex tabló legalsó sora a lehető legnagyobb lesz lexikografikusan. A fenti példa esetében például amikor $p = 3$ és $p = \frac{10}{7}$ közül választottunk, akkor az utóbbi esetben

$$\frac{\frac{2}{7} \cdot \frac{23}{7}}{\frac{10}{7}} = \frac{23}{35}$$

mértékben növekne a bal alsó szám értéke, azaz

$$\frac{-13}{7} + \frac{23}{35} = \frac{-6}{5}$$

lenne, azaz kevesebb lenne, mint a $p = 3$ választás után nyert $\frac{26}{21}$. Ezért is volt szerencsés a $p = 3$ pivotelemet választani.