L'Hospital-szabály néven ismeretes a 18. századi Bernoulli János svájci matematikus következő észrevétele: Ha az f és g függvényekre és egy konkrét ξ számra keressük, az

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)}{g(x)}$$

számot, és a k nemnegatív egész számra ki tudjuk számítani az

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)}$$

határértéket, de

$$\begin{aligned}f^{(0)}(\xi) &= f^{(1)}(\xi)=...=f^{(k-1)}(\xi)=0\\ g^{(0)}(\xi) &= g^{(1)}(\xi)=...=g^{(k-1)}(\xi)=0\end{aligned}$$

akkor a kijelenthetjük, hogy a

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)}{g(x)}$$

képlet is értelemes, sőt

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\xi}\frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)}$$

Itt emlékeztetünk arra, hogy $f^{(0)}(\xi)=\lim_{x\to\xi}f(x)$, $f^{(1)}$ az f deriváltja és $f^{(m+1)}$ az $f^{(m)}$ deriváltja.

Példák:

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, mert $\sin' x=\cos x$, $x'=1$, és $\frac{\cos 0}{1}=1$.

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1-x-x^2}{\tan x^2}=\frac{-1}{2}$, mert $(\exp(x)-1-x-x^2)''=\exp(x)-2$, $(\tan x^2)''=(2x(1+\tan^2 x^2)'=2+2\left(\tan x^2\right)\left(1+2x\tan x^2\right)^2$.

3. $\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1-x-x^2}{\tan x^2}=\frac{-1}{2}$. 4. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-2^{x-1}}{\sqrt[3]{x}-1}=\frac{3}{2}-3\log 2$.

5. $\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2x}-\sqrt[4]{8}}{x^2-2}=\sqrt[4]{8}/8$. 6. $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3^x}{3^2-x^2}=\frac{9(\log 3-1)}{2}$.

7. $\lim_{x\to 1}\frac{\log_2(1+x^2)}{\log^2(1-x)}=0$. 8. $\lim_{x\to e}\frac{e^x-e^e}{\sqrt{e^x}-\sqrt{e^e}}=2\sqrt{e^e}$

9. $\lim_{x\to(\pi/2)^-}\sqrt{\frac{\pi-2x}{2}}\cdot\tan x=+\infty$ 10. $\lim_{x\to 0}\frac{\log(e^x-1)}{\log(1-e^{-x})}=1$

További gyakorló feladatok találhatók a Thomas-jegyzet első kötetében a 277. oldalon.