Meghatározandó az X mátrix, melyre $X - \left(a^T b\right) C^{-1} = XA$, ahol

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad a = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 2 \end{bmatrix}$$

Először átrendezzük az egyenletet:

$$-\left(a^T b\right) C^{-1} = XD$$

ahol

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Másodszor kiszámítjuk az $a^T b$ szorzatot, ami -1.
Harmadszor a fenti egyenletet szorozzuk jobbról $-C$-vel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = XDC$$

Tehát X nem más, mint a DC mátrix inverze. Már csak ezt kell kiszámítani.

$$DC = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{-1}{3} & -2 \\ \frac{3}{2} & \frac{2}{3} & 5 \\ 1 & \frac{1}{3} & 5 \end{bmatrix}$$

:

$$X = \begin{bmatrix} -1 & \frac{-1}{3} & -2 \\ \frac{3}{2} & \frac{2}{3} & 5 \\ 1 & \frac{1}{3} & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-10}{3} & -2 & \frac{2}{3} \\ 5 & 6 & -4 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Ellenőrzésként — nem kötelező, de hasznos annak, aki könnyen elszámolhatja, egyúttal jó gyakorlás is — visszahelyettesíthetünk az eredeti egyenletbe:

$$\begin{aligned}
X - \left(a^T b\right) C^{-1} &= \left[\begin{bmatrix} \frac{-10}{3} & -2 & \frac{2}{3} \\ 5 & 6 & -4 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\right] - \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 2 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{-10}{3} & -2 & \frac{2}{3} \\ 5 & 6 & -4 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{-10}{3} & -2 & \frac{2}{3} \\ 5 & 6 & -4 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-4}{3} & -2 & \frac{2}{3} \\ 5 & 3 & 2 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-2}{3} \end{bmatrix} \\
XA &= \begin{bmatrix} \frac{-10}{3} & -2 & \frac{2}{3} \\ 5 & 6 & -4 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-4}{3} & -2 & \frac{2}{3} \\ 5 & 3 & 2 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-2}{3} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Meghatározandó az X mátrix, melyre $B(2X + A) = A^T X + B$, ahol

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 9 & -14 & 11 \\ 9 & -10 & 8 \end{bmatrix}$$

Először átrendezzük az eredeti egyenletet

$$\left(2B - A^T\right) X = B - BA$$

Itt

$$2B - A^T = 2 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 9 & -14 & 11 \\ 9 & -10 & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & -9 & -9 \\ -4 & 10 & 10 \\ 4 & -11 & -10 \end{bmatrix}$$

Ennek a mátrixnak az inverze:

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & -9 \\ -4 & 10 & 10 \\ 4 & -11 & -10 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-5}{3} & \frac{-3}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Másrészt

$$B - BA = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 9 & -14 & 11 \\ 9 & -10 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -12 & 12 \\ 18 & -30 & 22 \\ 9 & -10 & 7 \end{bmatrix}$$

Tehát

$$X = \begin{bmatrix} \frac{-5}{3} & \frac{-3}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & -12 & 12 \\ 18 & -30 & 22 \\ 9 & -10 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 & 65 & -53 \\ -27 & 40 & -29 \\ 22 & -17 & 10 \end{bmatrix}$$

Ellenőrzés — mely most sem kötelező, de jó móka annak, aki nem a szudokút, hanem a mátrixszorzást szereti —:

$$\begin{aligned} B(2X + A) &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \left(2 \begin{bmatrix} -17 & 65 & -53 \\ -27 & 40 & -29 \\ 22 & -17 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 9 & -14 & 11 \\ 9 & -10 & 8 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -31 & 134 & -110 \\ -45 & 66 & -47 \\ 53 & -44 & 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -93 & 402 & -330 \\ 90 & -132 & 94 \\ -53 & 44 & -28 \end{bmatrix} \\ A^T X + B &= \begin{bmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 9 & -14 & 11 \\ 9 & -10 & 8 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -17 & 65 & -53 \\ -27 & 40 & -29 \\ 22 & -17 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 9 & 9 \\ 4 & -14 & -10 \\ -4 & 11 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -17 & 65 & -53 \\ -27 & 40 & -29 \\ 22 & -17 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -96 & 402 & -330 \\ 90 & -130 & 94 \\ -53 & 44 & -27 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Minden stimmel az utolsó számjegyre! De jó érzés!