Itt két maximumkeresési feladatot oldunk meg. Felhasználjuk a következő tételt, melyben a deriváltak és a második deriváltak szerepelnek:

Tétel. Ha az (a, b) intervallumon értelmezettek az f, $f\prime$ és $f\prime\prime$ függvények és az egész intervallumon $f\prime\prime < 0$, akkor az f függvény 0 vagy 1 darab helyen veszi fel a maximumát. Továbbá a és b között az egyetlen maximumhely ξ akkor és csak akkor, ha $f\prime(\xi) = 0$.

Feladatok:

1. Határozzuk meg a $2\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ kifejezés maximumát!

Megoldás: Az $f(x) = 2\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ függvény értelmezett a $(-1, +1)$ intervallumban,

$$f\prime(x) = \left(2\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)\prime = \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$$

$$f\prime\prime(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)\prime = \frac{(x+1)^{-3/2} + (x-1)^{-3/2}}{-2} < 0$$

Tehát a fenti tétel miatt a maximum olyan ξ értéknél vétetik fel, ahol

$$\frac{1}{\sqrt{\xi+1}} - \frac{1}{2\sqrt{1-\xi}} = 0$$

azaz $\xi = 0.6$-nél. Így a maximum: $f(\xi) = 2\sqrt{1+0.6} + \sqrt{1-0.6} = \sqrt{10}$. Mivel $2\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0} = 3 < \sqrt{10}$ és $2\sqrt{1+1} + \sqrt{1-1} = \sqrt{8} < \sqrt{10}$, ezért a maximum minden olyan x-re vontatkozik, amikor $2\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ értelmes.

2. Az aprószemű kristálycukor hamarabb oldódik, mint a nagyszemű. Ennek okát jobban megérthetjük, ha tekintünk három különböző méretű kockát, melyek térfogata számtani sorozatot alkot, és belátjuk, hogy a középső felszíne nagyobb, mint a két szélső felszínének a számtani közepe.

Megoldás: A középső kocka élét vegyük egységnek. Térfogata: 1, felszíne: 6. Az első kocka térfogatát jelölje $1 - x$, a harmadikét $1 + x$. Itt nyilván $-1 < x < +1$. Az első kocka élének hossza: $\sqrt[3]{1-x}$, a harmadiké: $\sqrt[3]{1+x}$. Tehát az első és az utolsó felszínének átlaga:

$$f(x) = 3\sqrt[3]{(1-x)^2} + 3\sqrt[3]{(1+x)^2}$$

Ennek deriváltja:

$$\left(3\sqrt[3]{(1-x)^2} + 3\sqrt[3]{(1+x)^2}\right)\prime$$

$$= \frac{2\left((1+x)\sqrt[3]{(1-x)^2} - (1-x)\sqrt[3]{(1+x)^2}\right)}{x^2-1}$$

A második derivált:

$$\left(\frac{2\left((1+x)\sqrt[3]{(1-x)^2}-(1-x)\sqrt[3]{(1+x)^2}\right)}{x^2-1}\right)\prime$$

$$= \quad \frac{(x-1)^2\sqrt[3]{(1+x)^2}+(x+1)^2\sqrt[3]{(1-x)^2}}{-1.5\,(x-1)^2\,(x+1)^2}<0$$

Tehát $f(x)$ maximuma ott van, ahol $f\prime(x)=0$, azaz

$$\frac{2\left((1+x)\sqrt[3]{(1-x)^2}-(1-x)\sqrt[3]{(1+x)^2}\right)}{x^2-1}=0$$

azaz

$$(1+x)\sqrt[3]{(1-x)^2}=(1-x)\sqrt[3]{(1+x)^2}$$

azaz

$$(1+x)^3(1-x)^2=(1-x)^3(1+x)^2$$

azaz

$$(1+x)^3(1-x)^2-(1-x)^3(1+x)^2=0$$

azaz

$$2x^5-4x^3+2x=0$$

azaz

$$2x\,(x-1)^2\,(x+1)^2=0$$

azaz $x=0$, hiszen $-1<x<+1$. Mindez azt jelenti, hogy $x\neq 0$ esetén $f(x)<f(0)=6$.