Itt egy maximumkeresési feladatot oldunk meg. Felhasználjuk a következő tételt, melyben a deriváltak és a második deriváltak szerepelnek:

Tétel. Ha az (a,b) intervallumon értelmezettek az f, $f\prime$ és $f\prime\prime$ függvények és az egész intervallumon $f\prime\prime < 0$, akkor az f függvény 0 vagy 1 darab helyen veszi fel a maximumát. Továbbá a és b között az egyetlen maximumhely ξ akkor és csak akkor, ha $f\prime(\xi) = 0$.

Feladat:

Határozzuk meg $\sqrt{x} + \sqrt{1-2x}$ kifejezés maximumát!

Megoldás: Az $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-2x}$ függvény értelmezett a $(0, \frac{1}{2})$ intervallumban,

$$f\prime(x) = \left(\sqrt{x} + \sqrt{1-2x}\right)\prime = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$$

$$f\prime\prime(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{1-2x}}\right)\prime = \frac{-1}{4\sqrt{x^3}} + \frac{-1}{\sqrt{(1-2x)^3}} < 0$$

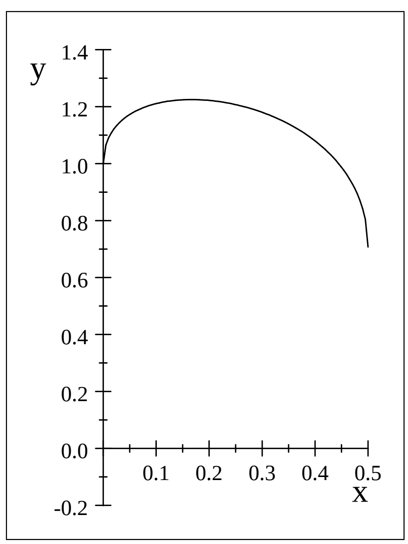
Tehát ha van, akkor olyan ξ pontnál van maximum, melyre

$$\frac{1}{2\sqrt{\xi}} - \frac{1}{\sqrt{1-2\xi}} = 0$$

Ebből: $\xi = \frac{1}{6}$. A maximum értéke: $f(\xi) = \sqrt{\frac{1}{6}} + \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{3/2} = 1.2247$.

—

Az $f(x)$ függvény grafikonja egyébként a következő:



$$f\prime\prime(\frac{1}{6}) = \frac{-1}{4\sqrt{\frac{1}{6^3}}} + \frac{-1}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3}} = \frac{-\sqrt{486}}{4}$$

$$\frac{-1}{-\frac{9}{4}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{24}}{27} = 0.181\,44$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-2x}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}}\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-2x}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707\,11$$