Mintafeladatok zárthelyi dolgozatra
Hujter Mihály
(`http://www.math.bme.hu/~hujter/mintadog.pdf`)

Az alábbiakban négy feladattípust tárgyalunk, melyek mintául szolgálnak a közelgő zárthelyire.
1.a) A baloldali mátrixban van nyereghely. Melyik elem az? b) A jobboldali mátrixban nincs nyereghely. Mennyi a minimax és mennyi a maximin? Javasoljon optimális keverést mindkét játékosnak!

1.2	2.3	3.7	5.1
3.1	2.7	2.8	2.8

1.2	2.3	3.7	5.1
3.1	2.7	2.1	2.1

2. Megoldandó a bináris hátizsákfeladat a következő adatokra!

	12	35	8	36	9	24
39	3	13	3	15	4	11

3. Magyar módszerrel megoldandó a következő hozzárendelési feladat.

9	8	1	5	4
6	7	1	2	3
1	1	1	1	1
5	4	1	9	8
2	3	1	6	7

4. Az alábbi szállítási feladatokban a kínálati mennyiségek mindegyike 4 értékű, a keresleti mennyiségek mindegyike 3 értékű. a) Keresendő Vogel–Korda heurisztikával megengedett bázismegoldás a bal oldali költségmátrixú szállítási feladathoz, és a potenciálok segítségével igazolandó, hogy a talált megoldás optimális. b) A jobb oldali költségmátrixhoz keresendő az optimális megoldás akár a disztribúciós módszerrel, akár az Egerváry-féle magyar módszerrel.

9	1	7	6
2	3	4	3
8	5	2	2

2	2	5	8
3	4	3	2
6	7	1	9

Megoldások: 1. A *maximin* és *minimax* elemeket (.) illetve [.] jellel jelöljük; a duplán megjelölt elem a nyereghely:

1.2	2.3	3.7	5.1
3.1	[(2.7)]	2.8	2.8

;

1.2	2.3	3.7	5.1
3.1	[2.7]	(2.1)	(2.1)

. A mellékelt ábra szerint $x_1 = \frac{2.7-2.1}{(2.7-2.1)+(3.7-2.3)} = 0.3$. Ezért $x_2 = 1 - 0.3 = 0.7$. Következésképpen $y_1 = 0$ és $y_4 = 0$. A másik ábra szerint $y_2 = \frac{3.7-2.1}{(2.7-2.3)+(3.7-2.1)} = 0.8$ és $y_3 = 1 - y_2 = 0.2$. A játék értéke: $0.3 \cdot 2.3 + 0.7 \cdot 2.7 = 2.58$.

2. A relaxált feladatból ezt kapjuk:

124<126	12	35	8	36	9	24
39	3	13	3	15	4	11
	1	1	1	1	1	1/11

.

Ez a feladat szétválik hatfelé:

88<92	35	8	36	9	24
39	13	3	15	4	11
	1	1	1	1	4/11

;

89	12	8	36	9	24
39	3	3	15	4	11
	1	1	1	1	1

;

100<104	12	35	36	9	24
39	3	13	15	4	11
	1	1	1	1	4/11

;

88	12	35	8	9	24
39	3	13	3	4	11
	1	1	1	1	1

;

91<96	12	35	8	36	24
39	3	13	3	15	11
	1	1	1	1	5/11

;

124	12	35	8	36	9
39	3	13	3	15	4
	1	1	1	1	1

.

Az utolsó eset adja az optimális megoldást: $x^T = (1, 1, 1, 1, 1, 0)$.

3. Sorcsökkentés lehetséges, oszlopcsökkentés már nem:

9	8	1	5	4
6	7	1	2	3
1	1	1	1	1
5	4	1	9	8
2	3	1	6	7

;

8	7	0	4	3
5	6	0	1	2
0	0	0	0	0
4	3	0	8	7
1	2	0	5	6

. A középső sor és a középső

oszlop áthúzásával minden nullát eltalálunk. A nem áthúzott számok legkisebbike: 1. Az áthúzott sort növeljük 1-gyel, majd oszlopcsökkentés következik:

8	7	0	4	3
5	6	0	1	2
1	1	1	1	1
4	3	0	8	7
1	2	0	5	6

;

7	6	0	3	2
4	5	0	0	1
0	0	1	0	0
3	2	0	7	6
0	1	0	4	5

. Most 4 vonallal húzhatók át a nullák: 3. és 5. sor, 3. és 4. oszlop. Az áthúzások után ez marad:

7	6			2
4	5			1
3	2			6

. A nem áthúzott számok legkisebbike: 1. Az áthúzott sorokat növeljük 1-gyel és utána oszlopcsökkentés:

7	6	0	3	2
4	5	0	0	1
1	1	2	1	1
3	2	0	7	6
1	2	1	5	6

;

6	5	0	3	1
3	4	0	0	0
0	0	2	1	0
2	1	0	7	5
0	1	1	5	5

. Most megkeressük, hogyan lehetne legfeljebb 4 vonallal áthúzni az összes nullát. A középső oszloppal két sort is likvidálhatunk. Áthúzzuk tehát a középső oszlopot és a 2., 3., 5. sorokat. Ez marad:

6	5		3	1
2	1		7	5

. A legkisebb nem áthúzott szám: 1. Növeljük tehát az áthúzott sorokat 1-gyel, majd oszlopcsökkentés következik:

6	5	0	3	1
3	4	0	0	0
0	0	2	1	0
2	1	0	7	5
0	1	1	5	5

;

6	5	0	3	1
4	5	1	1	1
1	1	3	2	1
2	1	0	7	5
1	2	2	6	6

;

5	4	0	2	0
3	4	1	0	0
0	0	3	1	0
1	0	0	6	4
0	1	2	5	5

. Most már nem sikerül áthúzni legfeljebb 4 vonallal a nullákat. Minden sorból, minden oszlopból próbálunk egy-egy nullát kiragadni:

5	4	0	2	0
3	4	1	(0)	0
0	0	3	1	0
1	0	0	6	4
0	1	2	5	5

5	4	0		0
0	0	3		0
1	0	0		4
(0)	1	2		5

	4	0		(0)
	(0)	3		0
	0	(0)		4

.

Az eredeti mátrixon tehát az egyik optimális megoldás:

9	8	1	5	(4)
6	7	1	(2)	3
1	(1)	1	1	1
5	4	(1)	9	8
(2)	3	1	6	7

Ennek összköltsége: $4 + 2 + 1 + 1 + 2 = 10$.

4. a) A bal oldai költségmátrixra soronként illetve oszloponként a lekisebb és második legkisebb elemek:

$C =$

9	1	7	6
2	3	4	3
8	5	2	2

1,6; 2,3; 2,2; 2,8; 1,3; 2,4; 2,3. A legnagyobb különbség az első oszlopnál van. Tehát az X mátrixba az első beírás ez lesz: $X =$

3			

Mivel az 1. oszlop megtelt, így folytatódik a Vogel–Korda heurisztika:

	1	7	6
	3	4	3
	5	2	2

1,6; 3,3; 2,2; 1,3; 2,4; 2,3. A legnagyobb különbség az első sornál van. Tehát az X mátrix a következőképpen alakul: $X =$

	3		
3			

. Mivel most a második oszlop is megtelt, ezért így folytatódik a Vogel–Korda heurisztika:

		7	6
		4	3
		2	2

6,7; 3,4; 2,2; 2,4; 2,3. A legnagyobb különbség a harmadik oszlopnál van. Tehát az X mátrix a következőképpen alakul: $X =$

	3		
3			
		3	

. Most már egyértelmű a befejezés:

$X =$

	3		1
3			1
		3	1

Az $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, v_4$ értékek a következőképpen számítódnak a $C =$

9	1	7	6
2	3	4	3
8	5	2	2

mátrixból: $u_1 = 0$, $v_2 = 1$, $v_4 = 6$, $u_2 = 3 - v_4 = -3$, $u_3 = 2 - v_4 = -2$, $v_1 = 2 - u_2 = 5$, $v_3 = 2 - u_3 = 4$. Mármost az $u_i + v_j$ számok mátrixa:

5	1	4	6
2	-2	1	3
3	-1	2	2

. Mivel ez kisebbegyenlő, mint a C mátrix, ezért a fenti X optimális!

b) Az Egerváry-féle magyar módszerrel dolgozunk. Először sorcsökkentés:

2	2	5	8
3	4	3	2
6	7	1	9

;

0	0	3	6
1	2	1	0
5	6	0	8

. Oszlopcsökkentésre már nem is maradt lehetőség. Most át kell kúzni a nullákat összesen legfeljebb 11 értékben úgy, hogy a vízszintes vonalak értéke 4, a függőlegeseké 3. A nyerő megoldás: első sor és utolsókét oszlop. Ezen vonalak összértéke csak $4 + 3 + 3 = 10$. A maradék:

1	2		
5	6		

Itt a legkisebb szám: 1. Növeljük tehát az áthúzott sort 1-gyel, majd csökkentjük az oszlopokat.

0	0	3	6
1	2	1	0
5	6	0	8

;

1	1	4	7
1	2	1	0
5	6	0	8

;

0	0	4	7
0	1	1	0
4	5	0	8

. Most is áthúzhatók a nullák legfeljebb 11 értékben: felső két sor és harmadik oszlop. A maradék:

4	5		8

Itt a legkisebb szám: 4. Növeljük tehát az áthúzott sorokat 4-gyel, majd csökkentjük az oszlopokat.

0	0	4	7
0	1	1	0
4	5	0	8

;

4	4	8	11
4	5	5	4
4	5	0	8

;

0	0	8	7
0	0	5	0
0	0	0	4

Most már könnyen megkaphatunk egy optimális X-et: előbb $X =$

			3
		3	

, majd $X =$

3	1		
	1		3
	1	3	