Kőnig Dénes: Matematikai mulatságok
Lampel R. Könyvkereskedés, Budapest, 1905
[Részletek a szerkesztő, Hujter Mihály megjegyzéseivel]
.
[*A szerkesztő megjegyzése:* Ebben az írásban a jelenlegi — tehát 2011-ben érvényes — helyesírási szabályokat követjük. Így már a címet is így írtuk és a szerző családnevét is hosszú ő-vel, mivel az 1930-as évektől már biztosan így írta maga is. Általában azonban a tulajdonnevek írásmódjában a hagyományosat követjük. A matematika tartalom szempontjából nagy szigorral ellenőrizzük a szerzőt, aki csak tizenhét-tizennyolc év körüli lehetett a könyv első részének írásakor.]
.
Beke Manó: Előszó
Nagy örömömre szolgált, hogy fiatal barátom, legkedvesebb tanítványaim egyike vállalkozott arra, hogy ,,*Matematikai mulatságok*" címen oly könyvecskét szerkesszen, mely hivatva van némileg arra, hogy a matematikai problémák iránti érdeklődést az iskolában és ezen kívül is fölkeltse, s az olvasót némely általánosan elterjedt, és sokszor a középiskolai tanításanyagba egyáltalában bele nem illeszthető matematikai kérdésekkel foglalkoztassa.
Ilyen irányú könyv már igen sok van; a külföldi irodalom legjelesebb ilyen gyűjteményeit, melyekből a szerző anyagát válogatta, a könyvecske végén felsorolva találhatja az olvasó; még magyar nyelvű gyűjtemény is létezik; de az ezen munkácskánál sokkal elemibb, inkább csak a közkeletű számtani és geometriai rejtvényeket tartalmazza. Ez a könyvecske nemcsak ilyen, általánosan elterjedt, rendszerint elsőfokú egyenletek által megfejthető talányokat, mondhatnók, népszerű találós számtani feladatokat tartalmaz, hanem az említett külföldi jelentősebb művek nyomán betekintést nyújt a számok csudás világába: adataival kissé közelebb hozza a nagy számokat felfogásunk határaihoz, bemutatja néhány szám és számsorozat meglepő szabályosságait, újabb, nem egészen közismeretű módokat közöl a számok kitalálásának annyira elterjedt szórakoztató játékához, megismerteti a mathematika egyik ősrégi, nem csak játékszerű, hanem tudományos szempontból is érdekes problémáját: a képeslapokban és ifjúsági iratokban is sokszor szereplő bűvös négyzeteket, közöl néhány mathematikai játékot, melyek között egyesek, mint, például a *15 török és 15 keresztény*, *a farkas, a kecske és a káposzta átszállítása*, a *Josephus és a barátjának megmenekülése* stb. a matematikai irodalom legrégibb problémái közé tartoznak és még ma is bizonnyal sokaknak igen kedves fejtörő gyakorlatul fognak szolgálni. Még a mathematikai iskolai tananyag szempontjából is fontosak azok a fejtegetések, a melyek mathematikai hamisságok címen egyes, még tanulók között is igen elterjedt hibás bizonyításokra vonatkoznak, megjelölve mindenütt a bizonyítás hibáját. Nem kevésbé fontosak a szorosan vett, iskolai anyag kibővítése szempontjából azok a feladatok, melyek a síkidomok szétszedését és összerakását tárgyalják, s a melyek a mellett, hogy kedves játékul szolgálhatnak, egyúttal az egyenlő területű idomok összefüggésébe is mélyebb betekintést nyújtanak.
A művecske tartalmának eme rövid jellemzése után fölvethető az a kérdés, hogy szükséges-e és hasznos-e ilyen könyvecske? Véleményünk szerint szükséges, hogy a szorosan vett iskolai mathematikai tanításanyagon kívül is foglalkozzék a matematika iránt némi érdeklődést tanusító olvasó ilyen számtani és geometriai vonatkozású kérdésekkel.
De nem is mesterségesen teremtett szükségletről van szó. Az ilyen irányú problémák iránti érdeklődés a művelt körökben, sőt, miként a számtani vonatkozású népies találós mesék nagy száma és különösen a magyar számtani feladatok leleményessége mutatja, még a népben is megvan. Hiszen alig akadunk olyan társaságra, a hol ilyen matematikai rejtvények ne szerepelnének. Egyes szellemes találós kérdések bámulatos gyorsasággal járják be az egész országot, sőt az egész művelt világot. Középiskolai működésem alatt többször iparkodtam a mulatságos kérdések gyűjteményét a tanulók gyűjtése révén növelni és mindannyiszor meggyőződtem arról, hogy az osztály nagy része igen élénken foglalkozik ilyen matematikai mulatságos kérdésekkel. Megvan lehat a természetes érdeklődés ilyen problémák iránt és ennek kielégítését célozó művecskét szükségesnek kell mondanunk.
A második kérdésre még könnyebben válaszolhatunk. Hiszen minden természetes szellemi igény kielégítésére szolgáló könyvet hasznosnak kell tekintenünk. De mi az ilyen könyvtől, mely az iskolai tananyag körén kívül eső, azt sok tekintetben kiegészítő, érdekes kérdésekkel foglalkozik, melyek között igen sok mély jelentőségű, még tudományos szempontból is nevezetes valamely lángész éles előrelátásából eredő szabályosságok foglaltatnak: azt is várhatjuk, hogy talán akad olyan olvasó, a kit ellenállhatatlan erővel vonz a számok varázsa a mathematika bűvös világába. Ezen érdekes tüneményeknek a mathematika történetének tanusága szerint már eddig is megvolt az üdvös hatásuk a mathematikai tudományok fejlődésére.
Reméljük, hogy e könyvecske — ha csak parányi mértékben is — hozzájárul ahhoz, hogy a mathematikai tudmányokkal nálunk többen és szívesebben foglalkozzanak; már pedig: ,,*artem geometriae discere atque exercere publice interest*" (Cod. Justin. IX. k. 18. c. 2.)
.
Tartalom

Tait problémái és hasonló feladatok
Elhelyezkedések körben
Átkelési, átöntési és vasúti feladatok
Apróságok
.

Nagy számok

Az írásmód, mellyel a legnagyobb számokat is igen röviden leírhatjuk, hozzászoktatta a matematikával foglalkozó könzönséget is a nagy számokhoz. De, minthogy ez az írásmód nem tesz nagy különbséget a számok közt (hiszen egy 0 hozzáírásával megtízszerezhetjük, kettővel megszázszorozhatjuk a számot), ezért, bár könnyen leírjuk őket, bármily nagyok is, megkülönböztetni és elképzelni őket nem tudjuk. A laikus talán már a milliót és a billiót sem különbözteti meg képzeletében. Pedig hogy mekkora e számok közt a különbség, azt eléggé mutatja, hogy egy millió másodperc elteltéhez 12 napra sincs szükség, míg egy billió másodperc 33333 év alatt telik el. [*A szerkesztő megjegyzése:* Itt a szerző — vagy a nyomdász — kis hibát vétett, ugyanis a jelenleg használatos *Gergely-féle naptár* szerint 400 esztendőnként $400 \cdot 365 + 99 = 146\,099$ nap van, így egy billió másodperc már a 31689 év előtt elfogy.]

Azt sem igen hinné el az ember, hogy *Krisztus születése* óta tavaly múlt el az első ezer millió (*milliárd*) perc. [*A szerkesztő megjegyzése:* Ezeket a sorokat 1902-ben vagy 1903-ban írta le szerző. Ismeretes, hogy a *Júliánusz-naptár* szerint négy esztendőnként $3 \cdot 365 + 366 = 1461$ nap telik el, ami az 1600-as esztendő utolsó napjáig $400 \cdot 1461 = 584,400$ napot jelent. Tudni kell azonban, hogy a Gergely-naptár bevezetésekor ebből 10 napot elvettek, és elvettek továbbá előzetesen egy-egy napot a tizenhetedik, a tizennyolcadik és a tizenkilencedik századokból is (1700.02.29, 1800.02.29, 1900.02.29). Végül az 1900-as esztendő utolsó napjának sorszáma: $(1900/4) \cdot 1461 - 13 = 693,962$. Percekben: $693,962 \cdot 24 \cdot 60 = 999,305,280$. Hiányzik tehát $694,720$ perc, ami 482 és fél nap. Napjainkra azonban kiderítették, hogy *Názáreti Jézus* időszámításunk kezdete előtt 5-ben vagy 6-ban (esetleg 7-ben) születhetett (nem decemberben, hanem inkább koratavasszal), hiszen például már *Nagy Heródes* is halott volt az időszámításunk előtti negyedik esztendő húsvétján, mert a feljegyzések szerint azon két telihold közötti hónapban halt meg, ami egy holdfogyatkozásnak illetve az azévi zsidó húsvétnak a teliholdja. Nagy Heródes halálának körülményeit egyébként éppen a Beke-féle előszóban is említett *Fláviusz József* (ismertebben: *Josephus Flavius*) zsidó–római történetírótól tudjuk.]

A nagy számokban való tévedésnek oka az, hogy az ipar, kereskedelem satöbbi nagyon ritkán használ 8-jegyűnél nagyobb számokat, és csak a matematikai, a fizikai és különösen az asztronómiai tudomány szorul ennél nagyobb számokra.

De hogy a mindennapi életben is gyakran juthatunk elképzelhetetlen nagy számokhoz, azt igazolni fogják a következő példák.

32 kártya 3 személy között

$$2,753 \quad \text{billió} \quad 294,408 \quad \text{millió} \quad 204,640$$

féleképp osztható szét úgy, hogy tundiillik 3 személy 10–10 kártyát kap, kettőt pedig külön teszünk. [*A szerkesztő megjegyzése:* Részletezzünk egy módszert, ahogy a szerző számolhatott: A 2 külön lap $32 \cdot 31/2 = 496$ módon rakható külön. Mármost 30 kártyából 10 darab

$$\frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 30,045,015$$

módon választható ki, és a maradék 20 kártyából 10 darab

$$\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 184,756$$

módon. Mindazonáltal

$$496 \cdot 30,045,015 \cdot 184,756 = 2,753,294,408,504\,,640$$

adja a végeredményt.] Az 52 lapos (*whist*-) kártya négy személy közt már

$$53,644, \quad 737,765, \quad 488,792, \quad 839,237, \quad 440,000$$

féleképp osztható szét.[*A szerkesztő megjegyzése:* Most is részletezzük a számításokat. Az első 13 lap kiválasztásának

$$\frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 635,013,559,600$$

módja van. A következő 13 lap kigyűjtésének

$$\frac{39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 8,122,425,444$$

darab lehetősége. A harmadik kézbe

$$\frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 10,400,600$$

módon kerülhetnek a kártyák. Mármost

$$635,013,559\,,000 \cdot 8,22\,,25,444 \cdot 10,400,600 = 53,644,737,765,488,792,839,237,440,000$$

adja a végeredményt.] Némiképp meggyőződhetünk e szám nagyságáról, ha megjegyezzük, hogy, ha a föld egész felületén sűrűn egymás mellett egy négyzetméter felületű asztaloknál whistet játszanának, 5 percenként egy játékot, akkor is több mint ezermillió évre volna szükség, hogy az összes lehető módon szétoszthassák az 52 kártyát. [*A szerkesztő megjegyzése:* Mint ismeretes, az egyenlítő hossza $4 \cdot 10^7$ méter. Ebből megkapjuk a földgolyó felszínét négyzetméterekben:

$$4\left(\frac{4 \cdot 10^7}{2\pi}\right)^2 \approx 1.62 \cdot 10^{14}$$

Egy nap 24 órájában az 5 perc $24 \cdot 12 = 288$-szor van meg, tehát a Gergely-naptár szerinti 400 éves ciklusokban összesen

$$(400 \cdot 365 + 97) \cdot 288 = 42,075,936$$

alkalommal. Mármost

$$\frac{4.2 \cdot 10^7 \cdot 1.62 \cdot 10^{14}}{400} \approx 1.7 \cdot 10^{19}$$

és

$$\frac{5.36 \cdot 10^{28}}{1.7 \cdot 10^{19}} \approx 3.15 \cdot 10^9$$

Tehát nemhogy egymilliárd, hanem még hárommilliárd év sem volna elég!]

Más ismeretes példa a következő: *Shehram*, a sakkjáték állítólagos feltalálója jutalmul annyi búzaszemet kívánt királyától, amennyi összekerül a sakktáblán, ha ennek első mezejére 1 szemet tesz és minden következőre kétszer annyit, mint az előbbire. Az így összekerülű magok száma $(2^{64} - 1)$ nagyobb 18 trilliónál és ennyi maggal a föld egész felületét csaknem 1 cm magas réteggel lehetne bevonni. [*A szerkesztő megjegyzése:* Egészen pontosan $18,446,744,073,709,551,615$ búzaszemről van szó. Tehát földünk felszínének minden négyzetméterére körülbelül

$$\frac{1.84 \cdot 10^{19}}{1.62 \cdot 10^{14}} \approx 114,000$$

búzaszem jut, azaz majdnem tucatnyi mag négyzetcentiméterenként. Még szerencse, hogy nem kell a búzaszemeket gúlába rakni, mint ahogy az ágyúgolyókat szokás, hiszen alapélén n búzaszemet számolva a gúlában

$$n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 2^2 + 1^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

darab mag fér el, és így 3.8 milliónal több réteget kell egymásra rakni. Mondjuk 2 milliméter rétegvastagságot számolva majdnem 8000 méteres hegy épül.]

...

[folyt. köv.]

.

Felhasznált munkák

Ahrens: Mathematische Unterhaltungen und Spiele. (Leipzig, Teubner, 1901.)
Bachet: Problèmes plaisants et délectables, qui se font par les nombers. (Paris, Gauthier-Villars, 1874.)
Ball: Récréations et problemes mathérnatiques. (Paris, Hermann, 1898.)
Fourrey: Récréations arithmétiques. (Paris, Nony, 1901.)
Lucas: Récréations mathématiques, I–IV. (Paris, Gauther-Villars, 1895.)
Lucas: L'arithmetique amusante. (Paris, Gauther-Villars, 1895.)
Ozanam: Récréations mathématiques. (Rouen, Osmont, 1962.) [névtelenül jelent meg]
Rebiere: Mathématiques et mathématiciens. (Paris, Nony, 1988.)
Schubert: Mathematische Mussestunden, I–III. (Leipzig, Göschen, 1900.)
Továbbá a „*Középiskolai Mathematikai Lapok*", „*Mathematikai és Physikai Lapok*", „*Mathesis*" (Paris, Gauthier-Villars, 1901.) című folyóiratok egyes kisebb közleményei.