Neumann János játekelméleti tétele

Hujter M.

Ez a kézirat a `http://www.math.bme.hu/~hujter/neumann.ps` fájlban található.

Adott és mindenki számára ismert egy m sorú, n oszlopú, valós számokból álló A mátrix, az i-edik sor k-adik elemét jelölje a_{ik}. Bicska Maxi és Gipsz Ilonka azt játszák, hogy Maxi nemnegatív valós x_i súllyal veszi a mátrix i-edik sorát, ahol $x_1 + \ldots + x_m = 1$, és ezeket a súlyozott sorokat összeadja. Tehát ,,kikever" egy sort! Hasonlóképpen Ilonka nemnegatív valós y_k súllyal veszi a mátrix k-adik oszlopát, ahol $y_1 + \ldots + y_n = 1$, és ezeket a súlyozott oszlopokat összeadja. Tehát kikever egy oszlopot! Mindegyikük titokban dönt a maga $\mathbf{x}$ illetve $\mathbf{y}$ vektoráról. Tehát a keverési arányok képezik a titkot! Most majd Maxi annyit nyer (Ilonkától), amennyi az általa készített vektor legkisebb eleme, és Ilonka annyit veszít (Maxi javára), amennyi az általa készített vektor legnagyobb eleme.
Könnyen látható, hogy Maxi nem nyerhet többet, mint amit Ilonka elveszít. Neumann János tétele szerint azonban ,,összeérnek", azaz a Maxi által elérhető legnagyobb nyeremény megegyezik az Ilonka által elérhető legkisebb veszteséggel.
Más megfogalmazásban: Jelölje σ az mn darab $x_i a_{ik} y_k$ szorzat összegét. Neumann tétele kimondja, hogy ha előbb $\mathbf{y}$ szerint minimalizáljuk σ értékét, majd ami kijött, azt maximalizáljuk $\mathbf{x}$ szerint, ugyanazt kapjuk, mint ha előbb $\mathbf{x}$ szerint maximalizáljuk σ értékét, majd ami kijött, azt minimalizáljuk $\mathbf{y}$ szerint. Szemléletesen szólva: Mindegy, hogy Maxi vagy Ilonka dönt előbb, mert úgyis titokban tartják a döntésüket a másik előtt.
Neumann János tétele a dualitás-tétel egy változata (pontosabban előfutára). A legjobb döntés meghozatala Max és Ilonka esetében is egy-egy lineáris programozási feladat megoldását jelenti, és ez a két feladat egymás duál feladata.
Képlettel kifejezve a következő két ,,kettős szélsőérték" egyenlőségét:

$$\max_{\substack{\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ x_1 + ... + x_m = 1}} \; \min_{\substack{\mathbf{y} \geq \mathbf{0} \\ y_1 + ... + y_n = 1}} \mathbf{x}^T A \mathbf{y} = \min_{\substack{\mathbf{y} \geq \mathbf{0} \\ y_1 + ... + y_n = 1}} \; \max_{\substack{\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ x_1 + ... + x_m = 1}} \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$$

A két oldal azonos értékét a mátrixjáték értékének nevezzük, egy olyan $\mathbf{x,y}$ párt pedig, melyekre a fenti képletben — mindegy, hogy melyik oldalon — ez az érték felvétetik, optimális stratégiának hívjuk.
A fenti egyenlőségbe — a Neumann féle ,,kevert stratégiájú nyeregponttétel" nevezetű formulába — az is bele van értve, hogy a baloldal az azonos a

$$\min_{\substack{\mathbf{y} \geq \mathbf{0} \\ y_1 + ... + y_n = 1}} A\mathbf{y}$$

minimumértéket elérő $\mathbf{y}$ vektorra az $A\mathbf{y}$ vektor legnagyobb elemével, illetve a jobboldal az azonos a

$$\max_{\substack{\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ x_1 + ... + x_m = 1}} \mathbf{x}^T A$$

maximumértéket elérő $\mathbf{x}$ vektorra az $\mathbf{y}^T \mathbf{A}$ vektor legkisebb elemével.
Példa: (Prékopa András egy kéziratából) Ha ez a mátrix:

5	4	3
2	5	4
3	2	5

akkor Max feladata: maximalizálja az α ismeretlen értékét, amíg $5x_1+2x_2+3x_3 \geq \alpha$; $4x_1+5x_2+2x_3 \geq \alpha$; $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq \alpha$; $x_1 + x_2 + x_3 = 1$; $x_1, x_2, x_3 \geq 0$. Ugyanakkor Ilonka feladata: minimalizálja a β ismeretlen értékét, amíg $5y_1 + 4y_2 + 3y_3 \leq \beta$; $2y_1 + 5y_2 + 4y_3 \leq \beta$; $3y_1 + 2y_2 + 5y_3 \leq \beta$; $y_1 + y_2 + y_3 = 1$;

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$. Az előbbi feladat optimális bázismegoldása: $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{4}, x_3 = \frac{1}{4}, \alpha = 3\frac{3}{4}$. Az utóbbi feladat optimális bázismegoldása: $y_1 = \frac{1}{4}, y_2 = \frac{1}{4}, y_3 = \frac{1}{2}, \beta = 3\frac{3}{4}$. Az a tény, hogy $\alpha = \beta$, éppen a Neumann-tétel alkalmazása erre mátrixra.
Ellenőrizzük, hogy mi jött ki! Maxi kikevert sora:

$$\mathbf{x}^T A = [\frac{1}{2}5 + \frac{1}{4}2 + \frac{1}{4}3, \frac{1}{2}4 + \frac{1}{4}5 + \frac{1}{4}2, \frac{1}{2}3 + \frac{1}{4}4 + \frac{1}{4}5] = [\frac{15}{4}, \frac{15}{4}, \frac{15}{4}]$$

és így ennek a kikevert sornak a legkisebb eleme is $\frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$. Ilonka kikevert oszlopa:

$$A\mathbf{y} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{4} \\ \frac{15}{4} \\ \frac{15}{4} \end{bmatrix}$$

és így ennek a kikevert oszlopnak a legkisebb eleme is $\frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$. A játék értéke ez a közös szám: $3\frac{3}{4}$. Ellenőrizhető, hogy $\mathbf{x}^T A\mathbf{y}$ értéke is ugyanerre jön ki.

Neumann János tétele még úgy is szemléltethető, hogy Maxi és Ilonka szerepet cserélnek, azaz nem úgy csinálják, mint eredetileg, azaz Maxi volt alul, Ilonka felül, és Max fölfele, Ilonka lefele törekedett, amíg össze nem értek, hanem most pontosan fordítva lesz: Először ,,megminuszegyszerezik" a mátrixot, majd transzponálják, és utána Ilonka lesz alul, Maxi felül, Ilonka kapaszkodik fölfelé, Maxi nyomul lefelé (mégiscsak így nőiesebb illetve férfiasabb). A játék lényege most is ugyanaz, csak a nyeremény lesz ellenkező előjelű. Az optimális stratégia ugyanaz lesz mindegyikük esetében, mint a játék eredeti változatában.

Néha egyszerűbben is kiszámítható $\alpha = \beta$ és $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ optimális értéke. Ha a mátrixban van (egy vagy több) olyan elem, mely a saját sorában legkisebb (egyike a legkisebbeknek), de a saját oszlopában a legnagyobb (egyike a legnagyobbaknak). Ilyenkor minden sokkal egyszerűbb! Az ilyen mátrixelemet nyeregnek nevezzük. Ilyenkor ez a szám $\alpha = \beta$ optimális értéke, és $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ optimális értékében mindegyik komponens nulla, kivéve aztokat, melyek a nyereg sorához illetve oszlopához tartoznak, mert ezek értéke: 1. Lássunk egy ilyen példát is:

3	-1	$\frac{8}{9}$	-2	2
5	4	3	-1	2
0	$-\frac{1}{77}$	-3	-1	0

Itt most a 2. sor 4. eleménél vagyunk nyeregben, tehát a játék értéke -1, az optimális statégiák pedig a következők:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y}^T = [0, 0, 0, 1, 0]$$

Kipróbálható, hogy most is teljesül, hogy ezekre a stratégiákra $\mathbf{x}^T A\mathbf{y}$ értéke tényleg -1.