

1. (15 pont) Grafikus módszerrel keressen megengedett bázismegoldást a következő lineáris programozási feladathoz: $x_1, x_2 \geq 0$; $(2x_1 + 3x_2) \rightarrow \min$; $3x_1 + 2x_2 \leq 21$; $x_1 + x_2 \geq 5$; $2x_1 + 3x_2 \geq 10$.

2. (15 pont) Oldja meg a fenti feladatot duál szimplex módszerrel is.

3. (15 pont) Végezze el a fenti feladatra a kétfázisú szimplex módszer első fázisát is.

4. (15 pont) Három japán kórházból négy-négy rohamkocsit kell küldeni négy házomláshoz földrengés miatt. Mind a négy helyszínen három-három kocsi van szükség, mert hasonló lakóházak dőltek össze. A következő táblázat mutatja, várhatóan hány perc alatt ér a helyszínre a mentő (sorok a kórházak, oszlopok a helyszínek). Küldje ki a mentőket úgy, hogy a 12 mentőkocsi összideje

	15	11	3	5
a lehető legkisebb legyen! Mennyi lesz ez a legkisebb összidő?	4	9	7	10
	7	5	13	6

5.a (5 pont) Röviden, milyen a standard alakú lineáris programozási feladat?

5.b (5 pont) Ha a célfüggvény $(x_1 + 2x_2) \rightarrow \min$ vagy ha $(x_1 + 2x_2) \rightarrow \max$, mikor lehet duál szimplex módszerrel megoldani a lineáris programozási feladatot. Indokoljon!

5.c (5 pont) Ha a „jobboldal” minden komponense pozitív egy primál alakú feladatnál, akkor miért nem kell kétfázisú szimplex módszer?

5.d (5 pont) Hogyan alakít át duál alakú feladatot primál alakúvá?

5.e (5 pont) Mit jelent egy bázismegoldás duál megengedettsége?

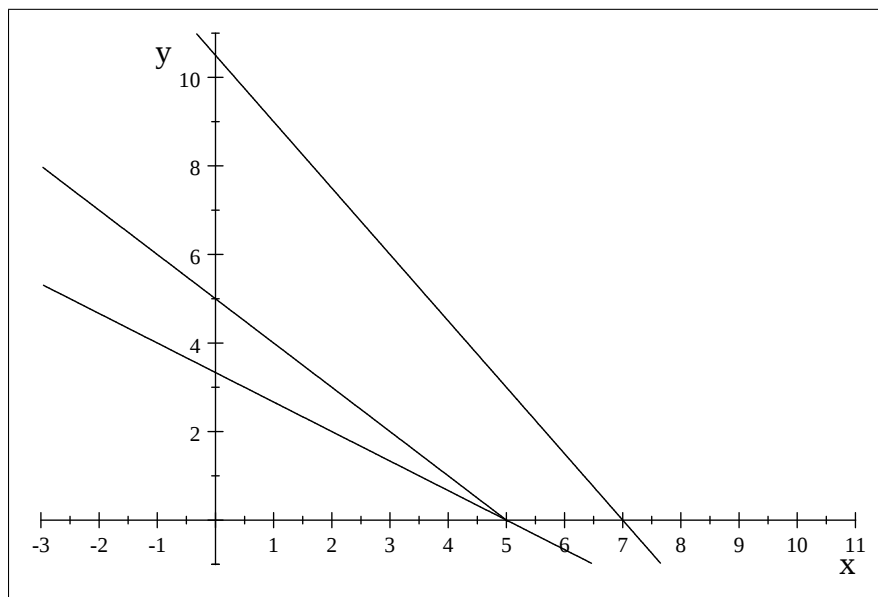
5.f (5 pont) Ha a 4. feladat szállítási problémáját hozzárendelési feladatként fogjuk fel, akkor a 12×12 -es méretű költségmátrix első sora mi lesz?

5.g (5 pont) Ha egy lineáris programozási feladatnak végtelen sok optimális megoldása van, akkor a duálisának lehet-e nemkorlátos a célfüggvénye? Miért?

5.h (5 pont) Hogyan kapjuk meg a „módosított” szimplex módszernél az optimális megoldást, ha már ismerjük az optimális bázist?

1. Arról a síkrészről van szó, amely például a $(6; 2)$ pontot tartalmazza.

$$(3x + 2y - 21)(x + y - 5)(2x + 3y - 10) = 0$$



Ennek a síkrésznek a sarkai: $(5; 0)$, $(7; 0)$, $(0; 5)$, $(0; 10.5)$. Ezeknek megfelelően a standard alakra hozott feladat megengedett bázismegoldásait, mint oszlopokat, a következő mátrix tartalmazza:

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & \frac{21}{2} \\ 6 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \frac{11}{2} \\ 0 & 4 & 5 & \frac{43}{2} \end{bmatrix}$$

Itt az x_3, x_4, x_5 értékeket az

$$x_3 = 21 - 3x_1 - 2x_2$$

$$x_4 = x_1 + x_2 - 5$$

$$x_5 = 2x_1 + 3x_2 - 10$$

képletekkel számoltuk.

2. A duál szimplex táblázatok (rövid) sorozata a következő:

0		-2	-3	10		-2	-1
-	.	-	-	-	.	-	-
0		-1	0	5		-1	1
0		0	-1	0		0	-1
21		3	2	6		3	-1
-5		(-1)	-1	0		-1	0
-10		-2	-3	0		-2	-1

Tehát csak egy pivotálásra volt szükség. Az (egyik) optimális megoldás: $x_1 = 5, x_2 = 0$.

3. A kiindulási pivottáblázat a következő:

$$\begin{array}{c|cccccccc} 21 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 2 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline & - & - & - & - & - & - & - \\ -15 & -3 & -4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Mivel két mesterséges változó van, legalább két pivotálásra lesz szükség. A pivotálások menete a Bland-szabály szerint a következő, ahol a későbbiekben már szükségtelen számokat ki sem számoljuk:

$$\begin{array}{c|cccccccc} 21 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & (1) & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 2 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline & - & - & - & - & - & - & - \\ -15 & -3 & -4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccc} 6 & 0 & -1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1) & 0 & 2 & -1 & 1 \\ \hline & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccc} 6 & 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & \\ 5 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & \\ \hline & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

4. A következő szállítási feladatot kell megoldanunk:

$$\begin{array}{cccc|c} \cdot & - & - & - & - & \cdot \\ | & \dots(15) & \dots(11) & \dots(3) & \dots(5) & | \quad 4 \\ | & \dots(4) & \dots(9) & \dots(7) & \dots(10) & | \quad 4 \\ | & \dots(7) & \dots(5) & \dots(13) & \dots(6) & | \quad 4 \\ \cdot & - & - & - & - & \cdot \\ & 3 & 3 & 3 & 3 & \end{array}$$

A sor-vagy-oszlopok közül kiválasztjuk azt, ahol a legkisebb és a második legkisebb költség közti különbség a lehető legnagyobb; soronként ez a különbség 2, 3, 2, oszloponként 3, 4, 4, 1. Két sor-vagy-oszlop jutott a döntőbe: a második

és a harmadik oszlop. Ezekben a legkisebb költség-elemeket tekintve a harmadik oszlopé van északabbra. Oda tesszük az első beírást.

⋯(15)	⋯(11)	3 ₍₃₎	⋯(5)	4
⋯(4)	⋯(9)	⋯(7)	⋯(10)	4
⋯(7)	⋯(5)	⋯(13)	⋯(6)	4
3	3	3	3	

A nem telített helyekre vonatkoztatva a legkisebb és a második legkisebb költség közti különbség soronként 6, 5, 1, oszloponként 3, 4, —, 1. Az első sor nyert; a legkisebb költségelemnél tesszük meg a következő beírást.

	...	...	3	1		4
	(15)	(11)	(3)	(5)		4
	(4)	(9)	(7)	(10)		4
	(7)	(5)	(13)	(6)		4
.	3	3	3	3	.	

A még mindig nem telített helyekre vonatkoztatva a legkisebb és a második legkisebb költség közti különbség soronként —, 5, 1, oszloponként 3, 4, —, 4. A második sor nyert; a legkisebb költségelemnél lesz a következő beírás.

⋯ ₍₁₅₎	⋯ ₍₁₁₎	3 ₍₃₎	1 ₍₅₎	4
3 ₍₄₎	⋯ ₍₉₎	⋯ ₍₇₎	⋯ ₍₁₀₎	4
⋯ ₍₇₎	⋯ ₍₅₎	⋯ ₍₁₃₎	⋯ ₍₆₎	4
3	3	3	3	

A még mindig nem telített helyekre vonatkoztatva a legkisebb és a második legkisebb költség közti különbség soronként —, 1, 1, oszloponként —, 4, —, 4. A második oszlop nyert a negyedik oszlop előtt, mert a legkisebb költségelemek ugyan egyformán északra vannak, de a második oszlopé van nyugatabbra. Ennél lesz tehát a következő beírás.

	...	...	3	1		4
	3	...	...	...		4
	...	3	...	...		4
.	3	3	3	3	.	

Most már egyértelmű a befejezés:

	...	...	...	...	
	...(15)	...(11)	3 ₍₃₎	1 ₍₅₎	4
	3 ₍₄₎	...(9)	...(7)	1 ₍₁₀₎	4
	...(7)	3 ₍₅₎	...(13)	1 ₍₆₎	4
	...	...	...	...	
	3	3	3	3	

Az összköltség:

$$3 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 10 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 6 = 57$$

Most megvizsgáljuk, hogy optimális megoldásnál vagyunk-e.

			(3)	(5)	
(0)		...	...	3 ₍₃₎	1 ₍₅₎
		3 ₍₄₎	...(9)	...(7)	1 ₍₁₀₎
		...(7)	3 ₍₅₎	...(13)	1 ₍₆₎
		...	...	...	...

			(3)	(5)	
(0)		...	...	3 ₍₃₎	1 ₍₅₎
(5)		3 ₍₄₎	...(9)	...(7)	1 ₍₁₀₎
(1)		...(7)	3 ₍₅₎	...(13)	1 ₍₆₎
		...	...	...	...

		(-1)	(4)	(3)	(5)
(0)		...	...	3 ₍₃₎	1 ₍₅₎
(5)		3 ₍₄₎	...(9)	...(7)	1 ₍₁₀₎
(1)		...(7)	3 ₍₅₎	...(13)	1 ₍₆₎
		...	...	...	...

A három-három ponttal jelzett helyek mindegyikét végigvizsgálva a második sor harmadik eleménél találunk javítási lehetőséget.

		(-1)	(4)	(3)	(5)
(0)		...	...	3 ₍₃₎	1 ₍₅₎
(5)		3 ₍₄₎	...(9)	+? ₍₇₎	1 ₍₁₀₎
(1)		...(7)	3 ₍₅₎	...(13)	1 ₍₆₎
		...	...	...	...

Most felderítjük a hurkot.

	...	...	...	...	
	...(15)	...(11)	3-? ₍₃₎	1+? ₍₅₎	
	3 ₍₄₎	...(9)	+? ₍₇₎	1-? ₍₁₀₎	
	...(7)	3 ₍₅₎	...(13)	1 ₍₆₎	
	...	...	...	...	

A hurok mentén 1 egységnyi lehet változtatni.

$\cdots(15)$	$\cdots(11)$	$2_{(3)}$	$2_{(5)}$
$3_{(4)}$	$\cdots(9)$	$1_{(7)}$	$\cdots(10)$
$\cdots(7)$	$3_{(5)}$	$\cdots(13)$	$1_{(6)}$

Ennek a megoldásnak az összköltsége:

$$2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 7 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 6 = 56$$

Újra megvizsgáljuk az optimalitást:

$$\begin{array}{c|cc}
(0) & \begin{array}{cc} \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \end{array} & \begin{array}{cc} \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \end{array} \\
\hline
& \begin{array}{cc} \cdots(15) & \cdots(11) \\ \hline 3_{(4)} & \cdots(9) \\ \hline \cdots(7) & 3_{(5)} \end{array} & \begin{array}{cc} \text{(3)} & \text{(5)} \\ \hline 2_{(3)} & 2_{(5)} \\ \hline 1_{(7)} & \cdots(10) \\ \hline \cdots(13) & 1_{(6)} \end{array}
\end{array}$$

		(3)	(5)
(0)	...	...	...
(4)	...	...	...
(1)	...	...	...

	(0)	(4)	(3)	(5)
(0)	...	...	2	2
(4)	3	...	1	...
(1)	...	3	...	1

A három-három ponttal jelzett helyeket mind leellenőrizve most már meggyőződünk az optimalitásról.

5.a $x \geq 0; Ax = b; c^T x \rightarrow \max$. 5.b $(x_1 + 2x_2) \rightarrow \min$ Ez kell a duál megengedettséghez. 5.c Ha a „jobboldal” minden komponense pozitív, az eltérés-változók már maguk is adnak egy primál megengedett bázist. 5.d Minden $\geq$ típusú feltételt (de a nemnegativitási feltételeket nem) megszorozunk (-1) -gyel, és a célfüggvényt is. 5.e $c_B^T B^{-1} A - c^T \geq 0$. Másképpen mondvá: a duál szimplex táblázat vizsgálósora rendben van, azaz nincs benne pozitív komponens. 5.f Az első sor megfelel az első kocsinak, ezért ez lesz: $[15, 15, 15, 11, 11, 11, 3, 3, 3, 5, 5, 5]$. 5.g Nem, mert a dualitási tétel miatt a duálisnak is van optimális megoldása. 5.h A $B^{-1}b$ vektort kiegészítjük 0-kkal a nem bázisbeli oszlopokhoz tartozó komponenseknél.