1. Keressük meg a következő függvények határértékét 0-nál, 1-nél, 2-nél és ∞-nél.

$$\frac{x^2-3x+2}{x-1}, \quad \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}, \quad \frac{1}{x^2} - \frac{x^4}{(x^2-3x+2)^2}, \quad \frac{\binom{x}{2}}{\binom{x}{3}} + \frac{\binom{x}{3}}{\binom{x}{2}}$$

2. Deriváljuk a következő függvényeket. Ha olyan pontot találunk, ahol a függvény értelmezett, de nem differenciálható, akkor az ilyen helyen nézzük meg, van-e határértéke a deriváltnak.

$$\binom{x}{4}, \quad \sqrt{\binom{x}{2}}, \quad \binom{\sqrt{x}}{2}, \quad \binom{\sqrt{2}}{2}/x, \quad \frac{2}{\sqrt{2x}}$$

$$8\sin^2 x + 1, \quad 4\sin^2 2(x+1), \quad 2\sin^2(2x^2+1), \quad (\sin^2 2x^2 + 1)^2$$

$$\arcsin\sqrt{x}, \quad \sqrt{\arctan x}, \quad \tan\sqrt{x}, \quad \sqrt{\cos\frac{1}{x}}$$

(A legutolsót csak $1 < 2x^2$ esetére vizsgáljuk!)

A határértékes feladatok megoldásainak vázlata illetve eredménye:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x^2-3x+2}{x-1} &= -2 \\
\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x-1} &= -1 \\
\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x-1} &= 0 \\
\lim_{x\to \infty} \frac{x^2-3x+2}{x-1} &= +\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = -2 \\
&\lim_{x\to 1} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} \text{ nem létezik} \\
&\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = 4 \\
&\lim_{x\to \infty} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = 1
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{x^4}{(x^2-3x+2)^2}\right)=+\infty$$
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{x^4}{(x^2-3x+2)^2}\right)=-\infty$$
$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{x^4}{(x^2-3x+2)^2}\right)=-\infty$$
$$\lim_{x\to \infty}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{x^4}{(x^2-3x+2)^2}\right)=-1$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x(x-1)}{2}}{\frac{x(x-1)(x-2)}{6}}+\frac{\frac{x(x-1)(x-2)}{6}}{\frac{x(x-1)}{2}}\right)=\frac{-13}{6}$$
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{x(x-1)}{2}}{\frac{x(x-1)(x-2)}{6}}+\frac{\frac{x(x-1)(x-2)}{6}}{\frac{x(x-1)}{2}}\right)=\frac{-10}{3}$$
$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\frac{x(x-1)}{2}}{\frac{x(x-1)(x-2)}{6}}+\frac{\frac{x(x-1)(x-2)}{6}}{\frac{x(x-1)}{2}}\right)\quad \text{nem létezik}$$
$$\lim_{x\to \infty}\left(\frac{\frac{x(x-1)}{2}}{\frac{x(x-1)(x-2)}{6}}+\frac{\frac{x(x-1)(x-2)}{6}}{\frac{x(x-1)}{2}}\right)=+\infty$$

A deriválásos feladatok megoldásának vázlata illetve eredménye:

$$\begin{aligned}\tbinom{x}{4}' &= \left(\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}\right)' \\ &= \frac{2x^3-9x^2+11x-3}{12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\tbinom{x}{2}}\right)' &= \left(\sqrt{\frac{x(x-1)}{2}}\right)' \\ &= \frac{2x-1}{2\sqrt{2x^2-2x}}\end{aligned}$$

Az eredeti függvény értelmes $x \leq 0$ és $1 \leq x$ esetén, de nem differenciálható $x=0$ és $x=1$ esetén. A derivált határértéke 0-nál balról $-\infty$ és 1-nél jobbról $+\infty$.

$$\begin{aligned}\tbinom{\sqrt{x}}{2}' &= \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{2}\right)' \\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{4\sqrt{x}}\end{aligned}$$

Az eredeti függvény értelmes $x \geq 0$ esetén. A derivált 0-nál jobbról $-\infty$-hez tart.

$$\begin{aligned}\left((\tfrac{\sqrt{2}}{2})/x\right)' &= \left(\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2x}\right)' \\ &= \frac{\sqrt{2}-2}{2x^2}\end{aligned}$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{2x}}\right)' = \frac{-1}{\sqrt{2x^3}}$$

$$\begin{aligned}\left(8\sin^2 x+1\right)' &= 8\sin 2x \\ \left(4\sin^2 2(x+1)\right)' &= 8\sin 4(x+1) \\ \left(2\sin^2(2x^2+1)\right)' &= 8x\sin 2(2x^2+1) \\ \left((\sin^2 2x^2+1)^2\right)' &= 8x(\sin^2 2x^2+1)\sin^2 4x^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\arcsin\sqrt{x}\right)' &= \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} \\ \lim_{x\to+0}\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} &= +\infty \\ \left(\sqrt{\arctan x}\right)' &= \frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{\arctan x}} \\ \lim_{x\to+0}\frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{\arctan x}} &= +\infty \\ \left(\tan\sqrt{x}\right)' &= \frac{1+\tan^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \\ \lim_{x\to+0}\frac{1+\tan^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} &= +\infty \\ \left(\sqrt{\cos\frac{1}{x}}\right)' &= \frac{\sin\frac{1}{x}}{2x^2\sqrt{\cos\frac{1}{x}}}\end{aligned}$$