A pivotálás hasznáról és hatékony módjáról

Adott M mátrixra *pivotálás* alatt a következőt értjük: Kijelölünk a mátrixban egy nemnulla elemet, melynek neve *pivotelem*, aztán az egész sort leosztjuk a pivotelemmel. Ezután a pivotelem fölött és alatt nullákat készítünk úgy, hogy a sorokból a pivotelem sorának annyiszorosát vonjuk le, hogy éppen nulla jöjjön ki.

A pivotálás tehát nem más, mint a lineáris algebrából jól ismert *Gauss–Jordán elimináció* részeként egy oszlop egységvektorrá alakítása.

Viszonylag könnyen igazolható, hogy a pivotálás nem változtatja meg az M mátrix rangját, sőt, ha valamely oszlop a többiből linárisan kombinálható a pivotálás előtt, akkor a pivotálás után is, sőt ugyanazok az együtthatók megfelelnek. A pivotálás révén egy négyzetes almátrix determinánsa, mely aldetermináns (vagy az aldetermináns sorainak a teljes M mátrixra való kiszélesítése) tartalmazza a pivotelemet, úgy változik, hogy a régi determinánst a pivotelemmel elosztva kapjuk az újat. Ha a pivotelem egy aldetermináns fölött vagy alatt van, akkor az aldetermináns értéke a pivotálás során nulla lesz.

Ezek a tulajdonságok könnyűvé teszik egy 3×3 vagy nagyobb méretű mátrix determinánsának kiszámítását is. Mindezeket példákon mutatjuk be. A következő pivotálásra kejelölt elemeket zárójelekkel mutatjuk meg:

Példa.

$$\det\begin{bmatrix} 3 & \frac{-2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{79}{3}$$

hiszen

$$\begin{bmatrix} 3 & \frac{-2}{3} & 0 \\ 0 & (1) & 4 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

és az utóbbi mátrix determinánsa a középső oszlop szerint kifejtve: $3\cdot 7 - \frac{8}{3}\cdot(-2) = \frac{79}{3}$ (példa vége) .

Példa.

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = -8$$

hiszen

$$\begin{bmatrix} (1) & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & (2) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

és itt a középső 2×2-es determináns: $-2\cdot 2 - 2\cdot 0 = -4$, és ezt a két pivotelemmel, azaz $1\cdot 2$-vel kell szorozni (példa vége).

Pivotálás segítségével megoldhatunk egyenletrendszereket is.
Példa.

$$19z_1 + 22z_2 = -79;\ 6z_1 - 22z_2 + 11z_3 + 11z_4 = 70; 8z_1 - 44z_2 + 22z_4 = 152$$

megoldása lehet ez: z_1 tetszőleges, $z_2 = \frac{-19z_1-79}{22}$, $z_3 = \frac{-2z_1-6}{11}$, $z_4 = \frac{-23z_1-3}{11}$,

hiszen pivotálások így alakulhatnak:

$$\begin{bmatrix} 19 & 22 & 0 & 0 & -79 \\ 6 & -22 & (11) & 11 & 70 \\ 8 & -44 & 0 & 22 & 152 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 19 & 22 & 0 & 0 & -79 \\ \frac{6}{11} & -2 & 1 & 1 & \frac{70}{11} \\ 8 & -44 & 0 & (22) & 152 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 19 & (22) & 0 & 0 & -79 \\ \frac{2}{11} & 0 & 1 & 0 & \frac{-6}{11} \\ \frac{4}{11} & -2 & 0 & 1 & \frac{76}{11} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \frac{19}{22} & 1 & 0 & 0 & \frac{-79}{22} \\ \frac{2}{11} & 0 & 1 & 0 & \frac{-6}{11} \\ \frac{23}{11} & 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{11} \end{bmatrix}$$

(példa vége)
Példa. Ennek az egyenletrendszernek nincs megoldása:

$$\alpha + 2\beta - 3\gamma = 4$$
$$\alpha - 2\beta + 3\gamma = 3$$
$$\alpha - 3\beta + 4\gamma = 2$$
$$\alpha + 3\beta - 4\gamma = 1$$

hiszen a pivotálások így alakulhatnak:

$$\begin{bmatrix} (1) & 2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 6 & -1 \\ 0 & -5 & 7 & -2 \\ 0 & (1) & -1 & -3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & (2) & -13 \\ 0 & 0 & 2 & -17 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-13}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-19}{2} \end{bmatrix}$$

és itt a harmadik sor lehetetlenséget mutat, nevezetesen azt, hogy $0 \cdot \alpha + 0 \cdot \beta + 0 \cdot \gamma = -4$ (példa vége).

Ha adott egy A mátrix m sorral és adott a mátrixnak egy $m \times m$-es invertálható B almátrixa, akkor pivotálással kiszámíthatjuk a $B^{-1}A$ szorzatmátrixot is. Felírjuk az A mátrixot és addig pivotáljuk, amíg a B mátrix helyén meg nem kapunk egy egységmátrixot.

Példa. A következő A és B mátrixokra kiszámítandó $B^{-1}A$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

A pivotálások sorozata ez lehet:

$$\begin{bmatrix} (1) & 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & (-2) & 2 \\ 0 & -5 & -2 & 6 & -2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & (4) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{4} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Itt az utolsó mátrix a végeredmény, azaz $B^{-1}A$ (példa vége).

A pivotálás arra is felhasználható, hogy egy lineáris programozási feladathoz lexikografikusan pozitív kiindulási szimplex tablót állítsunk elő, vagy legalábbis megpróbáljuk. Adva van egy

$$Ax = b; \quad x \geq 0; \quad c^{\mathsf{T}} x \to \max$$

alakú lineáris programozási feladat, és ehhez egy olyan mátrixot, azaz — az alábbiakban definiált alakú — szimplex tablót akarunk készíteni, melynek — ha az A mátrix m sorú és n oszlopú — összesen $m+1$ sora és $1+n$ oszlopa van. A tabló összetétele az alábbi (ahol B és c_B magyarázata a tabló definíciója után következik, a vízszintes és függőleges vonalak pedig nem részei a mátrixnak, csak a könnyebb tájékozódást szolgálják):

$$\begin{array}{ccc} B^{-1}b & | & B^{-1}A \\ - - - & + & - - - - - - - \\ c_B^{\mathsf{T}} B^{-1} b & | & c_B^{\mathsf{T}} B^{-1} A - c^{\mathsf{T}} \end{array}$$

Itt B az A mátrix valamely $m \times m$ méretű invertálható almátrixa, a c_B vektor pedig ugyanolyan indexekre való leszűkítése a c vektornak, mely oszlopindexekre a B mátrix leszűkíti az A mátrixot. De a feladatunk nemcsak az lesz, hogy egy akármilyen szimplex tablót készítsünk, hanem az is, hogy a szimplex tabló lexikografikusan pozitív legyen, ami azt jelenti, hogy a felső m sor (azaz a vízszintes vonal feletti rész) mindegyike lexikografikusan pozitív legyen, más szóval balról jobbra haladva a legelső nullától különböző elem a sorban pozitív legyen.

Megmutatjuk, hogyan lehet egy ilyen szimplex tablót felépíteni. Az építéshez m darab pivotálásra lesz szükségünk egy $m+1$ sorú, $1+n$ oszlopú mátrixban. (Előzetesen felhívjuk a figyelmet arra, hogy az $Ax = b$ egyenletrendszerben a sorok sorrendje nem bír jelentőséggel.)

Kiindulásul a

$$\begin{array}{ccc} b & | & A \\ - - - & + & - - - - - - - \\ 0 & | & -c^{\mathsf{T}} \end{array}$$

séma szerint rendezzük el az adatokat. Ha véletlenül ez a „tablókezdemény” nem lenne lexikografikusan pozitív, akkor a problémás sorokat minusz eggyel szorozva a lexikografikus pozitivitás elérhető. Ezután az A mátrix területén összesen m darabszor fogunk pivotálni, de mindannyiszor különböző sorban és oszlopban. Az utolsó n oszlopban tulajdonképpen tetszőleges m darab oszloppal foglalkozhatunk, és azokkal is tetszőleges sorrenben, de arra próbáljunk vigyázni, hogy a táblázat lexikografikus pozitivitása el ne romoljon, és ebből a célból csak pozitív pivotelemekkel dolgozzunk. Garancia nincs rá, hogy a lexikografikus pozitivitást végig meg tudjuk őrizni. De azért érdemes megpróbálni, mert valamennyi esélyünk azért van. Ha sikerül mind az m darab pivotálással megőriznünk a lexikografikus pozitivitást, akkor sikerül felépítenünk a kívánt szimplex tablót, esetleg a felső m darab sor sorrendjét kell megváltoztatni. A lexikografikus pozitivitás biztos megőrzése — ha lehetséges egyáltalán — az úgynevezett kétfázisú lexikografikus szimplex módszer első fázisával történik. De annak pontos definícióját is mellőzzük.

Példa. Az alábbi adatokra kíséreljük meg egy lexikografikusan pozitv szimplex tabló felállítását:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -2 & \frac{5}{4} & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$c^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 0 & 2 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

A kiindulási tablókezdemény ez lesz (ami szerencsénkre lexikografikusan pozitív):

$$\begin{array}{cccccccc}
3 & | & 3 & -1 & 2 & 1/3 & 0 & 1 \\
0 & | & 1 & 4 & (1) & -2 & 5/4 & -1 \\
-- & + & -- & -- & -- & -- & -- & -- \\
0 & | & -3 & 1 & -4 & 0 & -2 & 1/5
\end{array}$$

Találomra a középső sor középső 1-esével kezdem a pivotálást, és nem is lesz semmi baj, mert a lexikografikus pozitivitás megmarad:

$$\begin{array}{cccccccc}
3 & | & 1 & -9 & 0 & 13/3 & -5/2 & (3) \\
0 & | & 1 & 4 & 1 & -2 & 5/4 & -1 \\
-- & + & -- & -- & -- & -- & -- & -- \\
0 & | & 1 & 5 & 0 & -8 & 3 & -19/5
\end{array}$$

A második pivotálást már kötelező legfelső sorban végezni. A lexikografikus pozitivitás megőrzése egyrészt azt kívánja, hogy a legfelső sor lexikografikusan pozitív maradjon. Ezért a pivotelem csak pozitív lehet. A felső sorban az 1 elemet azonban ki kell zárni, mert ezt választva a második sor lexikografikusan negatívvá válna. Tehát a felső sorban a 13/3 és a 3 elemek jönnek szóba. Találomra a 3 elemet jelöltem ki a második pivotálásra.

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & | & 1/3 & -3 & 0 & 13/9 & -5/6 & 1 \\
1 & | & 4/3 & 1 & 1 & -5/9 & 5/12 & 0 \\
-- & + & -- & -- & -- & -- & -- & -- \\
19/5 & | & 34/15 & 28/5 & 0 & -113/45 & -1/6 & 0
\end{array}$$

A pivotelemek oszlopai kijelölik az eredeti A mátrixban a B mátrixot:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(példa vége)

Tekintettel arra, hogy a $B^{-1}A$ szorzatban a B helyén egységmátrixnak kell lenni, ezért tulajdonképpen a fenti szimplex tablóban a felső két sort fel kellene cserélni. De a csere mégsem szükséges, hiszen a lexikografikus szimplex algoritmus a fenti, a vízszintes vonal fölött összekevert sorú tablóval is tud dolgozni.

A lexikografikus szimplex algoritmus egy lexikografikusan pozitív szimplex tablóról indulva pivotálások sorozatát végzi. A pivotelemet mindig a vízszintes vonal fölötti olyan pozitív számok közül választja, melyek alatt a legalsó sorban negatív szám áll. De arra is vigyázni kell, hogy a pivotálás után is megmaradjon a lexikografikus pozitivitás. Ha még mindig több lehetőség van a pivotelem kiválasztására, akkor nem kötelező, de javallott úgy kiválasztani a pivotelemet, hogy a legalsó sor lexikografikusan a lehető legnagyobb legyen (azaz — többek közt — balról jobbra haladva az új legalsó sor a lehető leghamarabb legyen pozitív, ott a lehető legnagyobb legyen).

Példa. Végezzük el a fenti lineáris programozási feladaton a lexikografikus szimplex algoritmust.

1	|	1/3	−3	0	(13/9)	−5/6	1
1	|	4/3	1	1	−5/9	(5/12)	0
−−	+	−−	−−	−−	−−	−−	−−
19/5	|	34/15	28/5	0	−113/45	−1/6	0

A zárójelekkel megjelölt két elem bármelyike lehet pivotelem. De mielőtt elvégezzük valamelyikkel a pivotálást, nézzük meg, hogy a tabló bal alsó elemét mennyivel kell csökkentenünk a két pivotálásnál:

$$1 \cdot \frac{-113}{45} \cdot \frac{9}{13} = \frac{-113}{65}$$
$$1 \cdot \frac{-1}{6} \cdot \frac{12}{5} = \frac{-2}{5}$$

Mindkét pivotelem-jelöltnél a megegyező sorban és oszlopban a legbaloldalabbik illetve legalsó számok szorzatát még megszoroztuk a pivotelem-jelölt reciprokával. A legkisebbik számot választjuk, tehát azt, amelyik negatívabb. Itt most $\frac{-113}{65} - \frac{-2}{5} = \frac{-87}{65}$, tehát a $\frac{13}{9}$ lesz a kiválasztandó pivotelem. A pivotálás révén így alakul a tabló, melyben azonnal látszik a következő pivotelem is:

9/13	|	3/13	−27/13	0	1	−15/26	9/13
18/13	|	19/13	−2/13	1	0	(5/52)	5/13
−−	+	−−	−−	−−	−−	−−	−−
72/13	|	37/13	5/13	0	0	−21/13	113/65

Újabb pivotálással ezt kapjuk:

9	|	9	−3	6	1	0	3
14.4	|	15.2	−1.6	1	0	1	4
−−	+	−−	−−	−−	−−	−−	−−
28.8	|	27.4	−2.2	16.8	0	0	8.2

Ebből viszont azt a következtetést lehet levonni, hogy tetszőleges $\beta \geq 0$ számra az eredeti feladatnak megoldása a következő: $x_1 = 0$, $x_2 = \beta$, $x_3 = 0$, $x_4 = 9 + 3\beta$, $x_5 = 14.4 + 1.6\beta$, $x_6 = 0$. Erre az x-re ... (folyt köv.)