Bizonyítandó $n = 2, 3, ...$-ra, hogy

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1$$

Mivel $n = 1$ esetén mindkét oldal értéke 1, ezért elegendő azt látni, hogy ha n helyett $n + 1$ kerül beírásra, akkor a jobb oldal többet nő, mint a bal oldal. A bal oldal növekedése: $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$. A jobb oldalé: $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}$. Mármost az $a - b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$ képlet alapján:

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} > \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Megkeresendők $x^4 + x^3 + x^2 + 3x - 6$ valós gyökei.

Kipróbálva a konstans tag egész osztóit, azaz a $-3, -2, -1, 1, 2, 3$ számokat, azt kapjuk, hogy -2 és 1 gyökök. Felírjuk azt a másodfokút, aminek ezek a gyökei: $(x + 2)(x - 1) = x^2 + x - 2$. Tehát valamely alkalmas a, b, c valós számokra:

$$x^4 + x^3 + x^2 + 3x - 6 = \left(x^2 + x - 2\right)\left(ax^2 + bx + c\right)$$

A negyedfokú és a konstans tagokat tekintve látjuk, hogy $a = 1$ és $c = \frac{-6}{-2} = 3$. Mármost

$$\left(x^2 + x - 2\right)\left(x^2 + bx + 3\right)$$

harmadfokú tagja: $(b + 1)x^3$. Tehát $b + 1 = 1$, azaz $b = 0$, és az eredeti negyedfokú ilyen alakot nyer:

$$\left(x^2 + x - 2\right)\left(x^2 + 3\right)$$

Itt $x^2 + 3 \geq 3$ mutatja, hogy a már megtalált két gyökön kívül nincs más valós gyök, és a megtalált két gyök multiplicitása sem nagyobb 1-nél.

Meghatározandó és ábrázolandó $f \circ g$, ha $f(x) = \sqrt{x+2}$ és $g(x) = 2 - x^2$.

A számolás:

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{(2 - x^2) + 2} = \sqrt{4 - x^2}$$

Ez utóbbi függvény minden olyan x-re értelmezett, melyre $4 - x^2 \geq 0$ azaz $-2 \leq x \leq 2$.

Mivel $y = \sqrt{4 - x^2}$ átrendezéssel $y \geq 0$ és $x^2 + y^2 = 2^2$, ezért az $f \circ g$ függvény grafikonja egy origó középpontú, 2 sugarú félkör, mely az első és a második síknegyedben köti össze a $(2; 0)$ és a $(-2; 0)$ pontokat.

Előállítandó $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ inverze.

Felírjuk, hogy $y = \frac{x+1}{x-2}$, felcseréljük az x és y betűket, majd megoldjuk y-ra:

$$x = \frac{y+1}{y-2} \qquad\qquad y = \frac{2x+1}{x-1}$$

Az eredmény tehát az, hogy az f függvény inverze a g függvény, ahol

$$g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

Az eredeti f függvény nem volt értelmezve $x = 2$-re, az inverz pedig nem értelmezett $x = 1$-re. Átfogalmazva ez azt jelenti, hogy f nem vette fel az 1 értéket, g pedig nem veszi fel a 2 értéket.

Kiszámítandó

$$\frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\tan x}}{x}$$

határértéke 0-ban.

Ismertnek vesszük, hogy $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$. Másrészt az $a - b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$ képlet alapján:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\tan x}}{x} &= \frac{2\tan x}{x\left(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1-\tan x}\right)} \\ &= \frac{2\tan x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1-\tan x}}\end{aligned}$$

A jobb oldali tényező egy folytonos függvény, értéke 0-nál $\frac{1}{2}$. Tehát az eredetileg kérdezett határérték: $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

Meghatározandók az $x = -1$-ben és az $x = 3$-ban 0-ként, máshol az

$$\frac{x^2+3x+2}{x^2-2x-3}$$

képlettel értelmezett függvény összes szakadási helyei és azok fajtái.

Mivel a nevező gyökei éppen -1 és 3, csak ezen két helyen lehet szakadás; minden más helyen a függvény folytonos. A számlálót és a nevezőt is szorzattá bontjuk:

$$\frac{x^2+3x+2}{x^2-2x-3} = \frac{(x+2)(x+1)}{(x+1)(x-3)} = \frac{x+2}{x-3}$$

Ennek az utolsó törtnek — mint $x \neq 3$ esetén értelmezett folytonos függvénynek — az értéke -1-ben $\frac{-1+2}{-1-3} = \frac{-1}{4}$. Tehát itt valóban szakadás van, de az megszüntethető, hiszen ehhez a függvény értékét 0-ról $\frac{-1}{4}$-re kell változtatni. Másrészt 3-ban $x+2$ határértéke 5, $x-3$ határértéke 0, és így az $\frac{x+2}{x-3}$ függvénynek nincs határértéke 3-ban. Azaz az eredeti függvénynek nem megszüntethető szakadása van 3-ban.