Próbazárthelyi 1.

1. Ha $n \to \infty$, akkor hova tart a következő? $\sqrt{\frac{n^3}{n-1}} - n$

2. L'H-szabállyal kiszámítandó:

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt[x]{1+\tan x}$$

3. Felírandó az $\frac{x-1}{x+1}$ függvény vízszintes aszimtotájának és az $x_0 = 1$ pontnál húzott érintőnek az egyenlete?

4. Megkeresendő az $\frac{x^2-x}{x-2}$ függvény lokális minimumának helye és értéke.

5. Hol van inflexiós pontja az $1 + \ln x - \sqrt{x}$ függvénynek? Vázolni is kell a függvényt a $0 < x \leq e^2$ intervallumban.

Segítség az induláshoz (a zárthelyin nem lesz ilyen):

1. Az $a + b = (a^2 - b^2)/(a - b)$ összefüggés alkalmazható.

2. $\sqrt[x]{1+\tan x} = \exp(\frac{\ln(1+\tan x)}{x})$

3. A vízszintes aszimptota: $y = 1$, mert $\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$. Továbbá $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{2}{(x+1)^2}$.

4. $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2-x}{x-2}\right) = \frac{x^2-4x+2}{(x-2)^2}$ zérushelyei: $2+\sqrt{2}$ és $2-\sqrt{2}$

5. $\frac{\partial}{\partial x}\left(1+\ln x - \sqrt{x}\ \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{\sqrt{x}-4}{4x^2}$

A számítások részletei:

1.

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{n^3}{n-1}} - n &= \frac{\frac{n^3}{n-1} - n^2}{\sqrt{\frac{n^3}{n-1}} + n} = \frac{\frac{n^2}{n-1}}{\sqrt{\frac{n^3}{n-1}} + n} \\ &= \frac{\frac{n}{n-1}}{\sqrt{\frac{n}{n-1}} + 1}\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{n^3}{n-1}} - n\right) = \frac{1}{2}$$

2.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+\tan x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1+\tan^2 x}{1+\tan x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\exp(\frac{\ln(1+\tan x)}{x}\right)=e$$

3. Az aszimptota és az érintő egyenlete:

$$\begin{aligned} y &= 1 \\ y &= \frac{x-1}{2} \end{aligned}$$

4. Mivel $\frac{x^2-4x+2}{(x-2)^2}$ értéke $2-\sqrt{2}<x<2+\sqrt{2}$ esetén negatív, $x=2+\sqrt{2}$ esetén nulla, $2+\sqrt{2}<x$ esetén pozitív, ezért a maximumhely $x=2+\sqrt{2}$ esetén van, és itt a függvény értéke:

$$\frac{(2+\sqrt{2})^2-(2+\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})-2}=3+2\sqrt{2}$$

5. Mivel $\frac{\sqrt{x}-4}{4x^2}$ értéke $x=16$ esetén nulla, és ez előjelváltó zérushely, ezért az inflexiós pont $x=16$-nál van.

$$1+\ln x-\sqrt{x}$$