Ha $\lambda > 0$ konstans, akkor

$$\int_0^\infty \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \lambda e^{-\lambda x}\, dx = ?$$

Először ismételt parciális integrálással meghatározzuk az

$$\left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \lambda e^{-\lambda x}$$

függvény primitív függvényét:

$$\begin{aligned}
\int \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \lambda e^{-\lambda x} &= \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \left(-e^{-\lambda x}\right) - \int 2\left(x - \frac{1}{\lambda}\right)\left(-e^{-\lambda x}\right) \\
&= \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \left(-e^{-\lambda x}\right) - 2\left(x - \frac{1}{\lambda}\right) \cdot \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} + \int 2 \cdot \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \\
&= \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \left(-e^{-\lambda x}\right) - 2\left(x - \frac{1}{\lambda}\right) \cdot \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} - \frac{2e^{-\lambda x}}{\lambda^2} \\
&= -\left(x^2 + \lambda^{-2}\right) e^{-\lambda x} + \text{ konstans}
\end{aligned}$$

Másodszor meghatározuk a $\lim_{x\to\infty} \left(x^2 + \lambda^{-2}\right) e^{-\lambda x}$ határértéket kétszeri L'H-szabállyal:

$$\lim_{x\to\infty} \left(x^2 + \lambda^{-2}\right) e^{-\lambda x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + \lambda^{-2}}{e^{\lambda x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\lambda e^{\lambda x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\lambda^2 e^{\lambda x}} = 0$$

Tehát

$$\int_0^\infty \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \lambda e^{-\lambda x}\, dx = -0 + \left(0^2 + \lambda^{-2}\right) e^{-0\cdot x} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Mennyi az

$$\begin{aligned}
x - 2y + z &= 1 \\
2x - 4y + 2z &= 1
\end{aligned}$$

párhuzamos síkok távolsága?

Az első síkon nyerünk egy pontot például az $x = 0$, $y = 0$ behelyettesítéssel. Ez lesz: $(0; 0; 1)$. A második síkon is nyerünk egy pontot hasonló módszerrel: $(0; 0; \frac{1}{2})$. Majd alkalmazzuk Wettl-anyag utolsó oldalának módszerét. A két kapott pont közötti vektor:

$$(0; 0; \frac{1}{2}) - (0; 0; 1) = (0; 0; \frac{-1}{2})$$

A síkok közös normálvektora: $(1; -2; 1)$, ennek hossza: $\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$. Ezért a két sík távolsága:

$$\left| \frac{(0; 0; \frac{-1}{2}) \cdot (1; -2; 1)}{\sqrt{6}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

(Itt a számlálóban skalárszorzás történt.)

Keressük a $(-2; -1; 8)$ ponton átmenő, az $x + 1 = \frac{-y}{2} = \frac{3-z}{3}$ egyenesre merőleges síknak és az egyenesnek a közös pontját.

Először az egyenesen nyerünk két pontot például az $x = 0$ és az $x = 1$ behelyettesítéssel. Ezeket kapjuk: $(0; -2; 0)$ illetve $(1; -4; -3)$. A különbségvektoruk: $(-1; 2; 3)$. Ez lesz a sík normálvektora. Így a sík egyenlete:

$$-1 \cdot (x - (-2)) + 2 \cdot (y - (-1)) + 3 \cdot (z - 8) = 0$$

azaz

$$2y - x + 3z = 24$$

A közös pont megkereséséhez meg kell oldanunk a

$$\begin{aligned}
2y - x + 3z &= 24 \\
x + 1 &= \frac{-y}{2} \\
\frac{-y}{2} &= \frac{3 - z}{3}
\end{aligned}$$

egyenletrendszert. Ez lesz a megoldás: $x = -2$, $y = 2$, $z = 6$.
Tehát a sík és az egyenes közös pontja: $(-2; 2; 6)$.

Feltételezve, hogy a 6-dimenziós tér $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_6$ vektorai lineárisan függetlenek, független lesz-e ez a 6 vektor: $\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_4 - \mathbf{b}_3$, $\mathbf{b}_5 - \mathbf{b}_4$, $\mathbf{b}_6 - \mathbf{b}_5$, $\mathbf{b}_1$?

Tekintsük a k-adik vektort β_k-szor és képezzük az összeget; ezt nyerjük:

$$\begin{aligned}&(-\beta_1 + \beta_6)\,\mathbf{b}_1 + (-\beta_2 + \beta_1)\,\mathbf{b}_2 + (-\beta_3 + \beta_2)\,\mathbf{b}_3 \\ &+ (-\beta_4 + \beta_3)\,\mathbf{b}_4 + (-\beta_5 + \beta_4)\,\mathbf{b}_5 + \beta_5 \mathbf{b}_6\end{aligned}$$

Ez csak akkor lehet nulla, ha mindegyik együttható nulla, hiszen $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_6$ lineárisan függetlenek. Ugyanakkor $\beta_5 = 0$ és $-\beta_5 + \beta_4 = 0$ miatt $\beta_4 = 0$, és így tovább; végül megkapjuk, hogy az összes $\beta_i = 0$. Megnyertük tehát, hogy a felsorolt 6 vektor lineárisan független.

Feltételezve, hogy a 6-dimenziós tér $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_6$ vektorai lineárisan függetlenek, független lesz-e ez a 6 vektor: $\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_4 - \mathbf{b}_3$, $\mathbf{b}_5 - \mathbf{b}_4$, $\mathbf{b}_6 - \mathbf{b}_5$, $\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_6$?

Ezek nem lehetnek függetlenek, mert az összegük nulla. (Máskülönben az első 5 vektor független, hiszen az előbbi 6 között volt mindegyik.)

Benne van-e a $(-3; 1; -2)$ pont az $(1; 3; 4)$, $(2; 7; 2)$, $(-1; 2; 1)$ pontok generálta térben?

Olyan λ, μ, ν számokat keresünk, melyre

$$(-3; 1; -2) = \lambda(1; 3; 4) + \mu(2; 7; 2) + \nu(-1; 2; 1)$$

Máshogyan írva:

$$\begin{aligned}-3 &= \lambda + 2\mu - \nu \\ 1 &= 3\lambda + 7\mu + 2\nu \\ -2 &= 4\lambda + 2\mu + \nu\end{aligned}$$

Megoldva az egyenletrendszert: $\lambda = -1, \mu = 0, \nu = 2$. Tehát a válasz igenlő.

A szöveges feladat a) részének megoldása a következő mátrixszorzásokat igényli:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$VF = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 5 \\ 13 & 5 & 10 & 7 \end{bmatrix}$$

A b) kérdés megválaszolásához következő szorzást kell elvégezni:

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 5 \\ 13 & 5 & 10 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 69 & 41 & 66 & 55 \end{bmatrix}$$