

SZAKDOLGOZAT

Merev körű gráfok alkalmazása a numerikus
analízisben és a valószínűségi becslésekben

Szabó Péter

Témavezető: Hujter Mihály

egyetemi docens

BME Matematika Intézet,

Differenciálegyenletek Tanszék

BME

2009

Tartalomjegyzék

1. Alapfogalmak	4
2. Alkalmazás a numerikus analízisben	8
2.1. Dirac-tétel, szimpliciális sorrend	8
2.2. Gauss-elimináció ritka mátrixokra, a fa-szélesség problémája	12
3. Merev körű gráfok reprezentálása	16
4. Alkalmazás a valószínűségi becslésekben	19
4.1. Becslés fákkal és merev körű gráfokkal	19
4.1.1. A „k-out-of-n” típusú feladatok	27
4.2. Multifák	28
4.3. Cseresznyefák	31
5. Áttekintés	34

Előszó

Szakdolgozat-kiírás

Fél évszázada Dirac Gábor Endre, Gallai Tibor, Hajnal András és Surányi János kezdte a merev körű gráfok vizsgálatát. Napjainkban ezek leginkább triangulated (azaz háromszögelt) vagy chordal (azaz húros) néven ismeretesek. A Gauss-Jordan elimináció hatékony számítógépes megvalósításában és a lehető legélesebb valószínűségi becslések készítésénél is hasznossá váltak. Algoritmuseleméleti szempontból is kiemelkedő jelentőségű perfekt gráfok. A diplomamunka készítőjének feladata lenne egyrészt áttekinteni a kutatási ág jelenlegi helyzetét, másrészt egy napjainkban is vizsgált részterületen egy-két speciális kérdést alaposan is meg kellene tárgyalnia. Megfelelő táblázatokat és ábrákat is várunk.

Szeretnék köszönetet mondani a Budapesti Gazdasági és Műszaki Egyetem Matematika Intézetének és tanárainak a három éves oktatási tevékenységért, Hujter Mihály témavezetőmnek, Mádi-Nagy Gergelynek és Szántai Tamásnak a sokoldalú szakmai segítségért és konzultációkért, melyekkel hozzájárultak a szakdolgozat elkészültéhez.

1. Alapfogalmak

1. Definíció (Perfekt gráf). *Egy G irányítatlan, egyszerű gráf perfekt, ha minden $H \subseteq G$ feszített részgráfjának kromatikus- és klikkszámja megegyezik, azaz $\chi(H) = \omega(H)$ teljesül.*

A modern gráfelmélet egyik kulcsfogalma a perfekt gráf, melyek kutatása évtizedeken keresztül foglalkoztatta és foglalkoztatja ma is a matematikusokat. Gallai Tibor már 1958-ban megfogalmazott egy állítást, miszerint minden páros gráf komplementere perfekt. Mint később kiderült, ez ekvivalens König Dénes egy korábbi tételével: páros gráfban a maximális párosítás és a minimális lefogó élhalmaz számossága megegyezik. A „perfekt gráf” kifejezést először Claude Berge használta 1963-as cikkében. Az ő nevéhez fűződik az erős perfekt gráf sejtés, mely a perfekt gráfok karakterizációját adja és melyet csak jóval később, 2002-ben sikerült bizonyítani a Chudnovsky, Robertson, Seymour, Thomas négyesnek. Ezt a bizonyítást sok kisebb eredmény előzte meg, az erős perfekt gráf sejtést a perfekt gráfok több speciális részalmazára is belátták. Lovász László bizonyította Berge gyenge perfekt gráf sejtését, miszerint perfekt gráf komplementere is perfekt.

Gráf alatt mindig irányítatlan, egyszerű gráfot fogok érteni, tetszőleges G gráf csúcshalmazát $V(G)$, élhalmazát $E(G)$ jelöli, hacsak nincs más jelölés bevezetve. Feltételezem a gráfelméleti alapfogalmak ismeretét, melyek [9]-ben szerepelnek.

Két, gyakorlati szempontból kiemelkedően fontos perfekt halmaz a *páros gráfok* és a *merev körű gráfok* halmaza. Mindkettő bevezetése magyar matematikusok nevéhez kapcsolódik. Sok közös tulajdonságuk van, melyek egy része a perfekt gráfokra is öröklődik. Lássuk tehát a definíciókat!

2. Definíció (páros gráf). *Egy gráf páros, ha páros körüljárású, azaz minden köre (valamely körrel izomorf részgráfja) páros sok élet tartalmaz.*

Következmény, hogy minden páros gráf kétrészes, azaz csúcshalmaza két részre bontható úgy, hogy minden él a két rész között fut (végpontjai különböző részekben vannak). Ezt az állítást és a definíciót felhasználva könnyű belátni a következő tételt.

3. Tétel. *Minden páros gráf perfekt.*

Legyen B páros gráf. A kétrészeség miatt B kromatikus száma legfeljebb 2, a klikkszám úgyszintén, ugyanis B nem tartalmazhat háromszöget. A kromatikus és a klikkszám is pontosan akkor 1, ha B izolált pontokból áll, vagyis $E(B) = \emptyset$. Páros gráf részgráfja is páros, ezzel teljessé vált a perfektség bizonyítása.

4. Definíció (Húr). *Legyen $G = (V, E)$ tetszőleges gráf, $C_k \subseteq G$, egy $k \geq 4$ pontú kör G -ben. Egy $e \in E$ él a C_k kör húrja, ha e végpontjai a körön vannak, de e nem éle a körnek.*

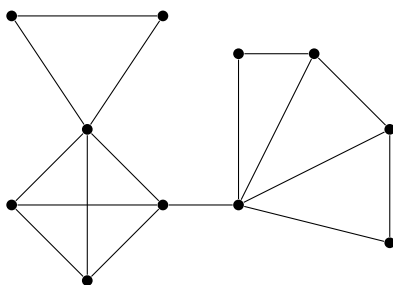
5. Definíció (Merev körű gráf). *Egy $G = (V, E)$ gráf merev körű, ha bármely, legalább 4 pontú köre feszít legalább egy húrt, vagyis G -nek minden feszített köre háromszög.*

A merev körű gráfok angol nyelvű szakirodalomban *chordal*, *triangulated*¹ vagy *rigid circuit* néven szerepelnek. A matematika olyan területein hasznosítják őket, mint a numerikus analízis, vagy a valószínűségi becslések elmélete. Alapvető szerepet játszanak továbbá rúdrendszerek merevségének vizsgálatában, valamint szervezési, ütemezési feladatok megoldásában.

Egy merev körű gráf klikkszáma akármekkora lehet, ebből is látszik, hogy nem minden merev körű gráf síkbarajzolható.

6. Definíció. *Egy gráf erdő, ha körmentes; fa, ha körmentes és összefüggő.*

¹Nem keverendő össze a háromszögelés terminussal, melyet a maximális síkba rajzolható gráfokra használnak



1. ábra. Példa egy merev körű gráfra

Belátható, hogy ha egy gráf páros és merev körű, akkor erdő. A merev körű és perfekt gráfok kapcsolatának mibenlétére az erős perfekt gráf tétel ad szemléletes választ.

7. Tétel (Erős perfekt gráf tétel). *Egy G gráf perfekt akkor és csak akkor, ha nem tartalmaz feszített részgráfként legalább 5 pontú páratlan kört, vagy annak komplementerét ($C_5, C_7, \overline{C_7}, \dots$ nem állhat elő G feszített részgrájként).*

Így könnyen adódik a következő állítás:

8. Tétel. *Minden merev körű gráf perfekt, de nem minden perfekt gráf merev körű.*

Erre a tételre a következő fejezetben adok olyan bizonyítást, mely nem használja az erős perfekt gráf tételt.

Tehát a merev körű gráfok valódi részhalmazát alkotják a perfekt gráfok halmazának. Most lássunk néhány perfekt gráf osztályt, melyek tartalmazási viszonyban állnak a merev körű gráfokkal.

9. Definíció (Intervallum gráf). *Egy $G = (V, E)$ gráf intervallum gráf, ha csúcsaihoz hozzárendelhetők a valós számegyenesen felvett (nyílt vagy zárt,*

korlátos vagy nem korlátos) intervallumok úgy, hogy 2 csúcs éllel van összekötve G -ben akkor és csak akkor, ha a nekik megfelelő intervallumok metszik egymást.

10. Definíció (Split gráf). *Egy G gráf split gráf, ha csúcshalmaza V_1 és V_2 részekre bontható úgy, hogy V_1 teljes gráfot feszít, V_2 pedig független (stabil) csúcshalmaz G -ben.*

Hasonlóan a merev körű vagy perfekt gráfokhoz, sok gráfosztály definiálható tiltott részgráfokkal, úgy, hogy megadjuk azokat a gráfokat, melyeket az osztály tagjai nem tartalmazhatnak feszített/közönséges részgráfként.

11. Definíció. *Egy gráf csillagszerű hármasa (asteroidal triple, AT) olyan független csúchármas, melyben bármely két csúcs a harmadik szomszédságát elkerülő úttal van összekötve. Egy gráf AT-mentes, ha nem tartalmaz csillagszerű hármast.*

12. Tétel. *Egy gráf intervallum gráf akkor és csak akkor, ha merev körű és AT mentes.*

13. Tétel (Földes, Hammer). *G split gráf akkor és csak akkor, ha nem tartalmaz feszített részgráfként C_4 , C_5 és $2K_2$ gráfokat².*

14. Definíció (Meyniel-gráf). *Egy $G = (V, E)$ gráf Meyniel gráf, ha bármely, legalább 5 pontú páratlan köre feszít legalább két húrt.*

Könnyen látható, hogy minden intervallum gráf, split gráf és erdő is merev körű, minden merev körű gráf Meyniel (lásd [12]).

²A $2K_2$ részgráf két független éllet jelent

2. Alkalmazás a numerikus analízisben

2.1. Dirac-tétel, szimpliciális sorrend

Ebben a fejezetben a merev körű gráfok alaptételét, a Dirac-tételt, és annak néhány következményét tárgyalom (lásd [6]).

15. Definíció. *Egy G gráf x csúcsa szimpliciális, ha az x és szomszédai által feszített részgráf teljes.*

Az elnevezés onnan ered, hogy ha geometriai szimplexeket lapjaik mentén egymáshoz ragasztunk, akkor a keletkezett testek élhálózati gráfján a nem ragasztott csúcsok szimpliciálisak lesznek.

Egy teljes gráfban minden csúcs szimpliciális. Ha egy csúcsnak 0 vagy 1 szomszédja van, akkor ő szimpliciális. Ebből következik, hogy minden fában van szimpliciális pont, éspedig pontosan a levelek (vagy 1 pontú fánál az egyetlen pont) lesznek ilyenek.

16. Tétel (Dirac). *Egy nem teljes, összefüggő, merev körű gráfban mindig van legalább két nem szomszédos szimpliciális pont.*

Bizonyítás: A bizonyítás csúcsok száma szerinti teljes indukcióval történik. Legyen G a tétel feltételeit kielégítő gráf, $|V(G)| = n$. Látható, hogy $n \geq 3$. Tegyük fel, hogy $n = 3$. Ekkor G egy 3 pontú út, mert nem teljes. Az út két végpontja két nem szomszédos szimpliciális pont lesz. Ezután tegyük fel hogy $n \geq 4$, és legfeljebb $n - 1$ pontú gráfokra már igazoltuk a tételt.

Először indirekt tegyük fel hogy nincs szimpliciális pont G -ben. Legyen v tetszőleges pont G -ben. Mivel v nem szimpliciális, ezért van két olyan szomszédja, melyek nincsenek összekötve. Legyen u és w két ilyen csúcs, hagyjuk el v -t G -ből, jelölje a keletkezett gráfot G_{-v} . G_{-v} -ben u és w között nem létezik út, mert ha létezne, akkor G -ben lenne egy nem merev kör, melynek

u, v, w csúcsai (u -t w -vel összekötő legrövidebb út és az uv, vw élek). Így u és w G_{-v} különböző összefüggő komponenseiben vannak, jelölje G_u az u -t tartalmazó összefüggő komponens. G_u nem lehet teljes gráf. Ugyanis ha teljes és van z csúcsa mely G -ben nem szomszédos v -vel, akkor z szimpliciális pont lesz G -ben. Ha G_u teljes és minden csúcsa szomszédos v -vel, akkor u lesz szimpliciális G -ben, hiszen szomszédai a G_u -beli csúcsok és v , melyek páronként szomszédosak. Ezért az indukciós feltevés miatt G_u -ban van két nem szomszédos szimpliciális pont: x és y . Ezek szomszédosak v -vel, máskülönben G -ben is szimpliciálisak lennének. De ekkor u és w helyett x -et és y -t választva adódik, hogy G_{-v} -ben x és y különböző összefüggő komponensekben vannak. x és y azonban G_{-v} u -t tartalmazó összefüggő komponensében voltak, \Rightarrow ellentmondás $\Rightarrow G$ -ben van legalább egy szimpliciális pont.

Legyen most $v \in V(G)$ szimpliciális. Ekkor G_{-v} összefüggő. Ha G_{-v} teljes, akkor mivel G nem teljes, ezért van $\tilde{x} \in V(G)$, hogy v és \tilde{x} nem szomszédosak. Így \tilde{x} és v két nem szomszédos, szimpliciális pont G -ben. Ha G_{-v} nem teljes, akkor az indukciós feltevés szerint van két nem szomszédos szimpliciális pontja. Ezek közül nem lehet mindkettő v -vel összekötve, mert akkor szomszédosak lennének v szimpliciális volta miatt. Ezért a v -vel nem szomszédos szimpliciális pontja G_{-v} -nek szimpliciális lesz G -ben is, így megvan a két nem szomszédos szimpliciális csúcs. \square

Ismertetek még két tételt, melyek segítségével jobban megérthetjük a merev körű gráfok strukturális sajátosságait, és bevezethetjük a szimpliciális sorrend fogalmát.

17. Tétel. G gráf merev körű akkor és csak akkor, ha bármely feszített részgráfja tartalmaz szimpliciális pontot.

Bizonyítás: Tegyük fel hogy G merev körű. Ekkor G minden feszített részgráfja is merev körű. Elegendő belátni azt, hogy minden merev körű gráfban van legalább egy szimpliciális pont. Legyen H egy tetszőleges feszített részgráfja G -nek. Ha H összefüggő komponensei között van teljes gráf, akkor

ennek minden pontja szimpliciális, így van H -ban legalább egy szimpliciális pont. Ha H -nak nincsen teljes összefüggő komponense, akkor a Dirac-tétel szerint bármely komponensben legalább 2 szimpliciális csúcs van, ekkor szintén készen vagyunk. Tehát G bármely feszített részgráfja is merev körű, melyben van szimpliciális pont.

Fordítva: legyen G olyan gráf, melynek minden feszített részgráfja tartalmaz szimpliciális pontot. Tegyük fel indirekt, hogy G nem merev körű. Ekkor van G -ben egy legalább 4 pontú feszített kör, legyen ez a H feszített részgráf. De most H egyik pontja sem szimpliciális, ami ellentmond a kezdeti feltevésnek. Ebből következik, hogy G merev körű. \square

Ez a tétel biztosít egy konstrukciót a merev körű gráfok előállításához. $G_1 = \{x_1\}$ legyen az 1 pontú gráf. Rekurzívan elkészítjük G_2, \dots, G_n -et a következőképpen: tegyük fel, hogy G_{k-1} -et már elkészítettük, $1 < k \leq n$. Keressünk egy teljes részgráfot G_{k-1} -ben, jelölje ennek csúcsait v_1, \dots, v_j . Vegyünk fel egy új x_k csúcsot, és kössük össze v_i -vel, $i = 1, \dots, j$. Az így kapott gráf legyen G_k . Az eljárás végén egy n pontú merev körű gráfot kapunk, melynek csúcshalmaza $\{x_1, \dots, x_n\}$. A fenti tétel miatt minden merev körű gráf előállítható ezzel az eljárással, ugyanis, ha G merev körű, akkor van szimpliciális pontja. Ezt elhagyva G -ből, a megmaradt gráf szintén merev körű lesz, amelyben van egy újabb szimpliciális pont. Így sorra elhagyva G csúcsait eljutunk az 1 pontú gráfhoz. Ezután fordított sorrendben visszatéve az elhagyott csúcsokat, pontosan a fenti konstrukciót kielégítő gráfot kapunk. Az x_1, \dots, x_n csúcssorrendet G egy szimpliciális sorrendjének nevezzük.

18. Tétel. n csúcsú merev körű gráfban a (tartalmazásra nézve) maximális klikkek száma legfeljebb n .

Bizonyítás: Legyen G tetszőleges merev körű gráf, legyen csúcsainak egy szimpliciális sorrendje x_1, \dots, x_n . Építsük fel a gráfot ez alapján egy pontból kiindulva, mindig egy szimpliciális csúcsot hozzávéve. Amikor egy új csúcsot veszünk fel, akkor az szomszédaival együtt egy maximális klikket alkot. Ez a

klikk vagy egy már meglévő maximális klikk bővítése (ha az új csúcs szomszédai már maximális klikket alkottak), vagy egy teljesen új maximális klikk, de minden esetben legfeljebb eggyel nőhet a maximális klikkek száma. Mivel ez a szám kezdetben 1 volt, és $n - 1$ darab új csúcsot vettünk fel, ezért végül legfeljebb n darab maximális klikk jöhet létre. \square

Visszatérek az 1. fejezetben ismertetett tétel bizonyítására, miszerint minden merev körű gráf perfekt.

Bizonyítás: (8. tétel)

Legyen G tetszőleges merev körű gráf. Azt kell belátni, hogy G -nek és minden feszített részgráfjának klikk- és kromatikus száma megegyezik. Mivel merev körű gráf bármely feszített részgráfja is merev körű, ezért elég az állítást G -re belátni.

Legyen G csúcsainak egy szimpliciális sorrendje x_1, \dots, x_n . Jelölje ω G klikkszámát. Próbáljuk meg a gráf csúcsait ω darab szín felhasználásával kiszínezni a szimpliciáli sorrend szerint. Indukcióval bizonyítom, hogy ez megtehető.

x_1 -et tetszőleges színnel kiszínezzük. Tegyük fel, hogy már kiszíneztük ω színnel az x_1, \dots, x_k csúcsok által feszített részgráfot. Vegyük fel az x_{k+1} pontot. Ennek szomszédai klikket alkotnak a szimpliciális sorrend definíciója miatt. Ez a klikk legfeljebb $\omega - 1$ csúcsot tartalmaz, mert ha ω csúcsot tartalmazna, akkor x_{k+1} -gyel együtt lenne egy $\omega + 1$ méretű klikk G -ben, ami ellentmondás.

Tehát x_{k+1} szomszédai között legfeljebb $\omega - 1$ szín fordul elő, emiatt x_{k+1} kiszínezzük a megmaradt színek egyikével. A teljes indukció miatt $k+1 = n$ -re is igaz az állítás, $\chi(G) = \omega$.

A 8. tétel második állítására –vagyis hogy nem minden perfekt gráf merev körű– példa lehet C_4 . \square

2.2. Gauss-elimináció ritka mátrixokra, a fa-szélesség problémája

Numerikus módszerek alkalmazása során gyakran adódnak olyan egyenlet-rendszerek, melyek mátrixa ritka, azaz ha a feladat mátrixa $n \times n$ -es, akkor n függvényében kevesebb, mint $O(n^2)$ nemnulla elemet tartalmaz. Például diagonális mátrixoknál ez a nagyságrend $O(n)$.

Ilyen feladat a spline interpolációs polinom együtthatóinak meghatározása, vagy a hővezetési egyenlet numerikus megoldása explicit Euler-módszerrel. Mindkét esetben tridiagonális együtthatómátrixú egyenletrendszert kell megoldani.

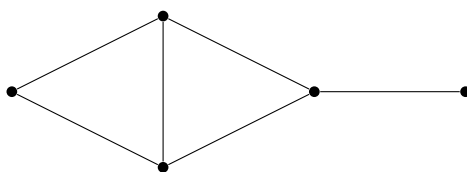
A merev körű gráfok jól használhatók nagy méretű, ritka mátrixok kezelésére. Tekintsünk egy $n \times n$ -es \mathbf{M} mátrixot, melyen végrehajtható a Gauss-elimináció. A nulla elemeket hagyjuk meg, a nemnulla elemek helyére a főátlón kívül írjunk 1-eseket, a főátlóba pedig 0-kat. Tegyük ezt a mátrixot szimmetrikussá úgy, hogy néhány 0-t 1-esre cserélünk. Tegyük fel, hogy az így kapott \mathbf{H} mátrix egy merev körű G gráf szomszédossági mátrixa.

$$\begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 0 \\ 8 & 0 & 9 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. ábra. Példa egy mátrix átalakítására

Keressünk G -ben egy x_1 szimpliális pontot, tartozzon ez a mátrix i_1 -edik sorához. Hajtsuk végre az i_1 -edik oszlophoz tartozó Gauss-transzformációt \mathbf{M} -en. Ekkor a \mathbf{H} mátrix főátlón kívüli 0 elemeivel azonos pozícióban lévő elemek \mathbf{M} -ben nullák maradnak. Hagyjuk el a G -ből az x_1 csúcsot, majd a

maradék gráfban keressünk egy újabb szimpliciális pontot, legyen ez x_2 . Ha x_2 \mathbf{H} i_2 -edik sorához tartozik, akkor végezzük el az i_2 -edik oszlophoz tartozó Gauss-transzformációt \mathbf{M} -en. Töröljük G -ből az x_2 csúcsot, majd folytassuk ugyanezt az eljárást, amíg G minden csúcsát el nem hagyjuk. Ekkor befejeződött az \mathbf{M} mátrix Gauss-eliminációja, és mivel \mathbf{M} sok 0 elemével nem kellett foglalkozni, ezért lényegesen kevesebb számolást igényelt, mint a hagyományos Gauss-elimináció. Az egyszerűség kedvéért megtehető az is, hogy \mathbf{M} sorait és oszlopait G fordított szimpliciális sorrendje szerint rendezzük (ne feledjük, hogy \mathbf{H} -n is ugyanazokat a transzformációkat kell végrehajtanunk, mint \mathbf{M} -en, és mivel szeretnénk, hogy ezután is ugyanazt a gráfot definiálja, ezért minden lépésben egyszerre azonos oszlop- és sorcseréket kell alkalmaznunk).



3. ábra. A fenti mátrix által definiált merev körű gráf

Ha az eljárás elején kapott \mathbf{H} mátrix nem merev körű gráfot definiál, akkor néhány 0-t még 1-esre kell cserélni benne, hogy ezt elérjük. Nem ismert gyors algoritmus arra, hogy a legkevesebb cserével (G -ben új él felvételével) ezt megcsináljuk. Elegendő a várt merev körű gráf klikkszámát minimalizálni, ami a fa-szélesség problémájával függ össze.

19. Definíció (fa felbontás). Egy $G = (V, E)$ gráf fa felbontása egy $F = (X, T)$ fagráf, melyben X elemei V részhalmazai, és az $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ halmazra teljesülnek a következő tulajdonságok:

1. $\bigcup_{i=1}^n x_i = V$
2. ha $uv \in E$, akkor $\exists 1 \leq i \leq n$, hogy $u, v \in x_i$

3. $\forall v \in V$ csúcsra az $\{x_i : v \in x_i\}$ halmaz által feszített részgráf F -ben összefüggő.

Egy adott gráf fa felbontása nem egyértelmű, például az $X = \{V\}$, $T = \emptyset$ halmazokkal definiált $F = (X, T)$ fa bármely gráfnak fa felbontása lesz.

20. Definíció. Egy G gráf $F = (X, T)$ fa felbontásának szélességén a $\max_{i=1..n} \{|x_i|\} - 1$ számot értjük. G fa-szélessége $tw(G)$, az összes lehetséges fa felbontások szélességei közül a legkisebb.

Egy ezzel ekvivalens definíció szerint G fa-szélessége a G -t tartalmazó összes merev körű gráf klikkszámai közül a legkisebb mínusz 1. Legyen $\tilde{G} = (V, \tilde{E})$ olyan gráf G csúcshalmazán, melynek éleire $uv \in \tilde{E} \Leftrightarrow$ ha $\exists x_i \in X$, hogy $u, v \in x_i$. Ekkor \tilde{G} merev körű gráf, klikkszáma $\max_{i=1..n} \{|x_i|\}$. Tehát G minden F fa felbontásának kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető egy \tilde{G}_F merev körű gráf, mely tartalmazza G -t és $\omega(\tilde{G}_F) - 1$ megegyezik F fa-szélességével. Ez igazolja a fenti ekvivalens definíció jogosságát.

Az is könnyen látható, hogy tetszőleges \tilde{G} merev körű gráf fa-szélessége $\omega(\tilde{G}) - 1$. A fa-szélesség definíciójában azért van a maximum csökkentve 1-gyel, hogy a fák fa-szélessége 1 legyen.

21. Tétel. Egy összefüggő gráf fa-szélessége 1 akkor és csak akkor, ha a gráf egy fa.

Egy adott gráf fa-szélességének meghatározása NP-teljes probléma. Korlátos fa-szélességű gráfosztályon néhány, tetszőleges gráfokra NP nehéz probléma gyorsan megoldhatóvá válik. Ilyen például a maximális független csúcshalmaz keresése.

A Gauss-eliminációs algoritmusnál fontos, hogy az \mathbf{M} mátrixnak megfeleltetett merev körű gráf klikkszáma lehetőleg kicsi legyen. Ha a \mathbf{H} mátrix

által definiált gráf nem merev körű, akkor egy őt tartalmazó merev körű gráfot kell választani az algoritmushoz, minimális klikkszámmal. Ez a klikkszám pontosan a \mathbf{H} mátrix által definiált gráf fa-szélessége plusz egy.

3. Merev körű gráfok reprezentálása

Ebben a fejezetben néhány algoritmuselméleti és egyéb szempontokból fontos merev körű gráfosztályról, és azok metszetgráfként való reprezentálásáról lesz szó.

22. Definíció. *Egy páros kör húrját páratlannak nevezzük, ha az általa összekötött pontok a körön páratlan távolságra vannak egymástól. Egy gráf erősen merev körű (strongly chordal), ha merev körű, és minden legalább 6 csúcsú páros körében van páratlan húr.*

23. Definíció. *Egy gráf egységintervallum gráf (unit interval), ha intervallum gráf, és csúcsai reprezentálhatók olyan intervallumokként, melyek egységnyi hosszúak.*

24. Tétel. *Minden merev körű gráf reprezentálható úgy, hogy csúcsai egy adott F fa részfái, két csúcs össze van kötve akkor és csak akkor, ha a nekik megfelelő részfák metszik egymást (van közös csúcsuk).*

Hasonló jellegű tétel igaz intervallum gráfokra, erősen merev körű gráfokra és egységintervallum gráfokra is.

25. Tétel. *Minden intervallum gráf reprezentálható úgy, hogy csúcsai egy P út részútjai, két csúcs össze van kötve akkor és csak akkor, ha a nekik megfelelő részutak metszik egymást.*

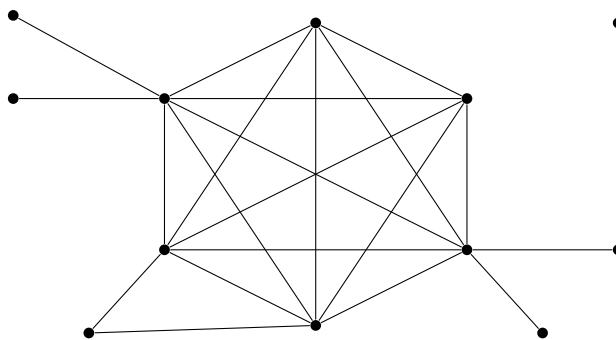
$[A \subset B]$ jelölje olyan gráfok osztályát, melyek reprezentálhatók úgy, hogy csúcsaik valamely B -beli gráf A -beli részgráfjai, két csúcs szomszédos akkor és csak akkor, ha különbözők, és a nekik megfelelő részgráfoknak van közös pontja.

A fenti jelöléssel élve:

- $[Fa \subset Fa] = \{\text{merev körű gráfok}\}$
- $[\acute{U}t \subset \acute{U}t] = \{\text{intervallum gráfok}\}$
- $[\acute{U}t \subset Fa] = \{\text{erősen merev körű gráfok}\}$
- $\bigcup_{i=1}^{\infty} [\{P_i\} \subset \acute{U}t] = \{\text{egységintervallum gráfok}\}$

Ezek az eredmények a gráfrepresentáció jól ismert példái. Sikerült egy hasonló jellegű tételt megfogalmaznom és bizonyítanom:

26. Tétel. $[Csillag \subset Csillag] = \{\text{split gráfok}\}$



4. ábra. Példa split gráfra

27. Definíció. A csillag egy olyan fagráf, melynek nincsen 1-nél több, leg-
alább 2 fokú csúcsa.

Bizonyítás: Először belátom, hogy ha $S \in [Csillag \subset Csillag]$ akkor S split gráf. Ehhez elég megmutatni, hogy $V(S)$ felbontható egy klikk és egy független csúcshalmaz uniójára.

Vegyük S csillag reprezentációját, $\{C, \{S_1, S_2, \dots, S_n\}\}$ -et, ahol C, S_i csillagok, $S_i \subseteq C$, $i = 1, \dots, n$, $n = |V(S)|$. Jelölje C csúcsainak számát m . Ha $m = 0, 1$, vagy 2 , akkor nyilvánvaló, hogy S split gráf. Felteszem, hogy $m \geq 3$. A csillag tulajdonság miatt C -nek 1 darab $m - 1$ fokú és $m - 1$

darab elsőfokú csúcsa (*levele*) van. Legyen g az $m - 1$ fokú csúcs. Legyen $\Omega = \{S_i : g \in V(S_i)\}$, $A = \{S_i : g \notin V(S_i)\}$, Ω' az Ω valamint A' az A elemeinek megfeleltetett csúcsok halmaza $V(S)$ -ben. Tetszőleges A -beli csillag üres vagy egy csúcsot tartalmaz (ugyanis S_i részgráfok összefüggőek, és $C \setminus \{g\}$ izolált pontok uniója). Emiatt S A -beli részgráfoknak megfelelő csúcsai nem lehetnek összekötve $\Rightarrow A'$ független csúcshalmaza S -nek. Mivel az Ω -beli részgráfoknak definíció szerint g közös pontjuk, ezért Ω' egy klikket feszít S -ben. S minden csúcsa eleme A' -nek vagy Ω' -nek, így S egy split gráf.

A fordított irányú tartalmazás belátásához most tegyük fel, hogy S split gráf. $S \in [\text{Csillag} \subset \text{Csillag}]$ -ot úgy bizonyítom, hogy megadom S -nek egy csillag reprezentációját.

Feltehető, hogy $|V(S)| \geq 3$, a kisebb csúcsszámokra triviális az állítás. Mivel S split, ezért $V(S) = A \cup \Omega$, ahol A független csúcshalmaz, Ω pedig egy klikket feszít S -ben. Vegyünk egy C csillagot, melynek $|V(S)| + 1$ csúcsa van, az egyetlen nem levél csúcsot jelölje g . S minden x csúcsához rendeljünk hozzá egy C -beli S'_x részgráfot a következőképpen: legyen λ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés $V(S)$ és C leveleinek halmaza között. Ha $x \in A$, akkor S_x legyen $\{\lambda(x)\}$. Ha $x \in \Omega$, akkor S_x legyen a $\{\lambda(a) : ax \in E(S)\} \cup \{\lambda(x)\} \cup \{g\}$. Jelölje S'_x az S_x csúcshalmaz által feszített részcsillagot C -ben. Ekkor $\{C, \{S'_x\}_{x \in V(S)}\}$ egy csillag reprezentációja S -nek. Ugyanis:

- Tetszőleges $x, y \in A$, $x \neq y$ -ra S_x és S_y különböző levelek (mert λ bijekció) $\Rightarrow S_x \cap S_y = \emptyset$.
- Tetszőleges $x, y \in \Omega$ pontokra $\{g\} \in S_x$ és $\{g\} \in S_y \Rightarrow S_x \cap S_y \neq \emptyset$.
- Ha $w \in \Omega$, $a \in A$ és $wa \in E(S)$ akkor $S_a = \{\lambda(a)\} \subset S_w \Rightarrow S_a \cap S_w \neq \emptyset$.
- Ha $w \in \Omega$, $a \in A$ és $wa \notin E(S)$ akkor $S_a \cap S_w = \{\lambda(a)\} \cap S_w = \emptyset$ (λ bijektivitása miatt $\lambda(a) \neq \lambda(w)$).

Tehát a kapott csillag reprezentáció valóban S -et reprezentálja. \square

4. Alkalmazás a valószínűségi becslésekben

4.1. Becslés fákkal és merev körű gráfokkal

Legyen (Ω, \mathcal{B}, P) valószínűségi mező, $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq \Omega$ eseményhalmazok. Szeretnénk felső becslést adni $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$ valószínűségeire, úgy, hogy a metszetvalószínűségek közül viszonylag keveset használjunk fel, ugyanis ezek kiszámítása sokszor nehéz.

28. Definíció. Legyen $S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$. Például $S_1 = \sum_{1 \leq i \leq n} P(A_i)$, $S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j)$, $S_n = P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$.

29. Tétel (Poincaré vagy szita formula). $P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = S_1 - S_2 + S_3 - \dots + (-1)^n S_n$

A fenti formula segítségével pontosan meghatározhatjuk az események uniójának valószínűségét, de ehhez $2^n - 1$ metszetvalószínűséget kell ismerünk (ha $P(A_i)$ -t is metszet valószínűségnek tekintjük), melyek meghatározása nagyon időigényes, sokszor lehetetlen (gondoljunk csak több dimenziós vektorváltozók valamely halmazba esésének valószínűségeire). A szita formula csonkításával azonban jól alkalmazható becsléseket, ún. Bonferroni-formulákat kaphatunk. Ezek közül néhány csak az $S_i, 1 \leq i \leq n$ értékeket használja – ezeket aggregált becslésnek nevezik – és vannak olyanok is, melyek a metszetvalószínűségek közül válogatnak, azok ismeretét feltételezik. Ez utóbbiak a nem aggregált becslések, és általában jobb eredményt adnak, mint az aggregáltak.

A ma is használt becslési módszereknek történetileg sok előzménye volt, ezek közül ismertetek néhányat (lásd [5]). Legyenek Y_1, \dots, Y_n tetszőleges valószínűségi változók. Szeretnénk meghatározni a $P(\max Y_i > c)$ valószínűséget. Jelölje A_i az $\{Y_i > c\}$ eseményt. Ekkor $P(\max Y_i > c) = P((Y_1 > c) \vee \dots \vee (Y_n > c)) = P(\bigcup_{i=1}^n A_i)$. Ez a feladat sok statisztikai számításnál

előfordul, eredménye a farok-valószínűség, mely általában egy 0-hoz közeli szám. A $P(\bigcup_{i=1}^n A_i)$ valószínűséget nehéz pontosan megadni, de legtöbbször egy jó felső becslés is elegendő.

Boole-tól és Bonferronitól származik a következő egyszerű becslés:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

Ehhez a formulához csak az egyes események valószínűségeit kell ismerni, míg későbbi becslések már a $P(A_i \cap A_j)$ metszetvalószínűségeket is felhasználják a felső korlát javításának érdekében. Például Hunter és Worsley becslése:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i=2}^n P(A_{i-1} \cap A_i)$$

Kounias becslése (1968):

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i) - \max_{1 \leq q \leq n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq q}}^n P(A_i \cap A_q).$$

Halperin 1965-ben megmutatta, hogy $P(\bigcup_{i=1}^n A_i)$ -re adható legjobb alsó és felső korlátok meghatározása (bizonyos, az A_i eseményekből kapható valószínűségek ismeretében) visszavezethető egy lineáris programozási feladatra, melyben $2^n - 1$ nemnegatív változó szerepel. A duális feladat megoldásával kaphatók meg azok az együtthetők, melyek az adott valószínűségekkel lineárisan kombinálva legjobb alsó és felső korlátokat szolgáltatják. A megoldás azonban lassú a sok változó miatt, így ez nem túl hatékony módszer a felső korlát számítására.

Csak S_1 és S_2 ismeretében adható optimális felső korlát események uniójának valószínűségére. Seneta és Chen közös cikkükben vezették be az alábbi becslést:

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq \min\left(1, S_1 - \frac{2}{n} S_2\right).$$

Léteznek csak az S_1, \dots, S_k értékeket használó optimális becslések is minden $1 \leq k \leq n$ -re, ezekkel Szántai Tamás foglalkozott részletesebben, (lásd [1]).

Olyan formulára van szükség, mely könnyen számítható és elég éles felső becslést ad. A gráfelméleti szemlélet hozott eredményt és ebben nagy szerepe volt Kruskal minimális súlyú feszítőfa keresésére szolgáló polinomiális algoritmusának.

Először ismertetek egy egyszerűbb, és könnyen algoritmizálható módszert, a *Hunter*-becslést. Ez alapvető módszernek tekinthető e témakörben. Most csak a $P(A_i)$, $P(A_i \cap A_j)$ valószínűségeket használjuk.

30. Definíció. Legyen $J \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ tetszőleges részhalmaz. Ekkor $\omega_J = (\bigcap_{i \in J} A_i) \cap (\bigcap_{i \in \bar{J}} \bar{A}_i)$ eseményt atomi eseménynek nevezzük az $\{A_i\}_{i=1}^n$ eseményrendszerre nézve.

Vegyünk egy n csúcsú K -val jelölt teljes gráfot, az i -edik csúcsnak feleltessük meg az A_i eseményt. Súlyozzuk az éleket úgy, hogy az ij él súlya legyen $P(A_i \cap A_j)$, minden $i, j = 1 \dots n$ -re. Legyen $F = (V(F), E(F))$ a K egy feszítőfája. Ekkor érvényes az alábbi becslés:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i \in V(F)} P(A_i) - \sum_{ij \in E(F)} P(A_i \cap A_j).$$

Bizonyítás: $P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{\omega \text{ atomi}} P(\omega)$. Legyen $\omega \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$ tetszőleges atomi esemény. Legyen $F_\omega = (V_\omega, E_\omega)$ F -nek a $V_\omega = \{k : \omega \in A_k\}$ csúcshalmaz által feszített részerdője. Ekkor $P(\omega)$ a $\sum_{i \in V(F)} P(A_i) - \sum_{ij \in E(F)} P(A_i \cap A_j)$ összegben $V_\omega - E_\omega$ -szor fordul elő, ugyanis ω az A_i események közül definíció szerint pontosan a V_ω -beliekben fordul elő, az $A_i \cap A_j$, $i, j \in E(F)$ események közül pedig azokban, melyekre $\omega \in A_i$ és $\omega \in A_j$, vagyis pont az E_ω -beli éleknek megfelelő eseményekben. Mivel F_ω erdő, ezért éleinek száma legalább 1-gyel kisebb, mint csúcsainak száma, azaz $P(\omega) V_\omega - E_\omega \geq 1$ -szer van számolva az egyenlőtlenség jobb oldalán, a bal oldalán pedig pontosan 1-szer. Mivel ez minden $\omega \in \Omega$ -ra igaz, és $P(\omega) \geq 0$, ezért az egyenlőtlenség jobb oldala valóban legalább akkora, mint a bal oldala. \square

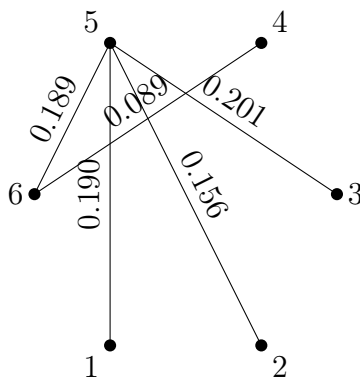
Kérdés azonban, hogy ez a becslés milyen F feszítőfára lesz a legélesebb. Maximális súlyú feszítőfát kell keresni a K élsúlyozott gráfban. Ez megtehető polinomidőben, például a Kruskal-algoritmussal (lásd [9]).

Lássunk egy példát konkrét szám adatokkal az eddig látott becslési módszerekre!

Legyen A_1, A_2, A_3, A_4 négy esemény, $p_i = P(A_i)$, $p_{ij} = P(A_i \cap A_j)$.

$$\begin{aligned}
 p_1 &= 0.2694, p_2 = 0.2817, p_3 = 0.3065, p_4 = 0.2626 \\
 p_{12} &= 0.2093, p_{13} = 0.1475, p_{14} = 0.1329, p_{23} = 0.1344, p_{24} = 0.1540, \\
 p_{34} &= 0.1700 \\
 P(\cup A_i) &= 0.4894
 \end{aligned}$$

Boole becslése:	1.1202
maximális csillaggal:	0.6225
csúcsok sorrendjében úttal:	0.6065
Hunter becslése:	0.5333
S_1, S_2 alapú becslés:	0.6462



5. ábra. Az alábbi példa maximális súlyú feszítőfája

$$p_1 = 0.268, p_2 = 0.312, p_3 = 0.302, p_4 = 0.172, p_5 = 0.384, p_6 = 0.278$$

$$\begin{aligned}
 p_{12} &= 0.000, p_{13} = 0.168, p_{14} = 0.033, p_{15} = 0.190, p_{16} = 0.155, p_{23} = 0.078, \\
 p_{24} &= 0.045, p_{25} = 0.156, p_{26} = 0.067, p_{34} = 0.056, p_{35} = 0.201, p_{36} = 0.111, \\
 p_{45} &= 0.049, p_{46} = 0.089, p_{56} = 0.189, \\
 P(\bigcup A_i) &= 0.674
 \end{aligned}$$

Boole becslése:	1.716
maximális csillaggal:	0.931
csúcsok sorrendjében úttal:	1.344
Hunter becslése:	0.891
S_1, S_2 alapú becslés:	1.187

Most tegyük fel, hogy a felső becsléshez a háromszoros metszetvalószínűségeket is használhatjuk. Most Ugyanazzal a K gráffal dolgozunk, mint a Hunter-becslésnél, azzal a különbséggel, hogy K összes ijk háromszögéhez (amelyekből $\binom{n}{3}$ darab van) hozzárendeljük a $P(A_i \cap A_j \cap A_k)$ súlyokat. Feszítők helyett a jobb korlát elérésének érdekében ezután merev körű gráfokat használunk (lásd [10], [11]).

31. Definíció. Legyen $M = (E, V) \subseteq K$ tetszőleges merev körű gráf, mely K összes csúcsát tartalmazza, jelölje T az M -beli háromszögek halmazát. Ekkor M súlya:

$$\omega(M) = \sum_{ij \in E} P(A_i \cap A_j) - \sum_{ijk \in T} P(A_i \cap A_j \cap A_k).$$

32. Tétel (Boros, Veneziani). Legyen $M = (E, V) \subseteq K$ tetszőleges merev körű gráf, mely K összes csúcsát tartalmazza. Ekkor a következő felső becslés igaz:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i \in V} P(A_i) - \omega(M).$$

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy M csúcsainak szimpliciális sorrendje $1, \dots, n$, jelölje az $1, \dots, m$ csúcsok által feszített merev körű gráfot $M_m = (V_m, E_m)$,

háromszögeinek halmazát T_m . Teljes indukcióval bizonyítom, hogy minden m -re

$$P\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) \leq \sum_{i \in V_m} P(A_i) - \omega(M_m).$$

M_1 -re a fenti egyenlőtlenség: $P(A_1) \leq P(A_1)$, ami nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy az összefüggés igaz M_{m-1} -re. Legyen ω tetszőleges atomi esemény az $\{A_1, \dots, A_n\}$ eseményrendszerre nézve. Jelölje $J_k(\omega)$ valamint $B_k(\omega)$ azt, hogy az M_k -ra felírt egyenlőtlenség jobb illetve bal oldalán az ω esemény valószínűségét hányszor számoltuk. Vizsgáljuk, hogy $P(\omega)$ hány-szor szerepel az M_m -re illetve M_{m-1} -re vonatkozó egyenlőtlenség bal és jobb oldalán.

Ha $\omega \not\subseteq A_m$, akkor $J_m(\omega) = J_{m-1}(\omega)$, $B_m(\omega) = B_{m-1}(\omega)$.

Ha $\omega \subseteq A_m$, akkor jelölje az m csúcs ω -t tartalmazó M_{m-1} -beli szomszédainak számát N_m . Mivel m jelen esetben szimpliciális, ezért az egyenlőtlenség jobb oldalán keletkező új tagokat összeszámolva kapjuk, hogy $J_m(\omega) - J_{m-1}(\omega) = 1 - N_m + \binom{N_m}{2}$. Ugyanis az ω -t tartalmazó új tagok: $P(A_m) - \sum_{x \in E_m} P(A_x \cap A_m) + \sum_{x, y \in T_m} P(A_x \cap A_y \cap A_m)$. Mivel $1 - N_m + \binom{N_m}{2} = \frac{1}{2}(N_m - 1)(N_m - 2) \geq 0$, $N_m \geq 0$ egész esetén, ezért $J_m(\omega) - J_{m-1}(\omega) \geq 0$.

Az minden esetben igaz, hogy $B_m(\omega) - B_{m-1}(\omega) \leq 1$, és ha 1, akkor szükségszerűen $B_{m-1}(\omega) = 0$. Ha $B_{m-1}(\omega) = 0$, akkor $\omega \not\subseteq A_k$, semilyen $k \leq m - 1$ -re, ezért $N_m = 0$, így $J_m(\omega) - J_{m-1}(\omega) = 1$.

Összegezve ezeket a megfontolásokat azt kapjuk, hogy:

$$B_m(\omega) - B_{m-1}(\omega) \leq J_m(\omega) - J_{m-1}(\omega) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\omega \text{ atomi}} (B_m(\omega) - B_{m-1}(\omega))P(\omega) \leq \\ & \leq \sum_{\omega \text{ atomi}} (J_m(\omega) - J_{m-1}(\omega))P(\omega), \end{aligned}$$

ami pont az jelenti, hogy a bal oldal kevésbé nőtt, mint a jobb oldal (minden itt szereplő valószínűség atomi események valószínűségeinek összege), vagyis a bizonyítandó egyenlőtlenség az m csúcs hozzávétele után is érvényben marad. A teljes indukció miatt $M_n = M$ -re is teljesül az állítás. \square

Az itt közölt bizonyítás saját eredményem, mely a [10]-ben található nál egyszerűbb, kombinatorikus eszközöket használ.

Nem ismert polinomiális algoritmus annak eldöntésére, hogy melyik M merev körű gráfra lenne a becslés a legélesebb, de biztosított, hogy ezzel a módszerrel adható legalább olyan jó becslés, mint Hunteré (a maximális súlyú feszítőfa is merev körű, erre a gráfra pontosan a Hunter-becslés adódik)

Az előző tételnél általánosabb állítás is igaz, ha megengedjük, hogy nemcsak a háromszögek, hanem a nagyobb klikkek szerinti metszetek is szerepeljenek. Boros és Veneziani fent ismertetett eredményével közel egy időben, K. Dohmen habilitációjában (lásd [8]) találkozhatunk először ezekkel a becslésekkel.

33. Tétel. *Tetszőleges páratlan r paraméterrel*

$$P\left(\bigcup_{i \in V} A_i\right) \leq \sum_{\substack{I \subseteq V \\ I \text{ klikk } G\text{-ben} \\ |I| \leq r}} (-1)^{|I|-1} P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right),$$

valamint

$$P\left(\bigcup_{i \in V} A_i\right) \leq \sum_{\substack{I \subseteq V \\ I \text{ klikk } G\text{-ben}}} (-1)^{|I|-1} P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right).$$

Ennek nyilvánvalóan az $r = 3$ alosete a 32. tétel. Azzal együtt, hogy általánosabb, ennek a korlátnak a számolása ugyanolyan nehéz is lehet, mint az eredeti szita formuláé. Például, ha G egy teljes gráf, akkor a szita formulát, ha független csúcsok halmaza, akkor Boole becslését, ha fa, akkor pedig a Hunter-korlátot kapjuk vissza.

A következő tétel a fenti becslés és a gráfok tartalmazása között teremt kapcsolatot. Annak árán, hogy új éleket húzunk be egy merev körű gráfba, és több metszet valószínűséget kell kiszámolnunk, javíthatunk a felső becslésen (ez érthető is, hiszen a teljes gráffal adódik a legélesebb becslés, az egyenlőség).

34. Tétel. Legyen $G = (V, E)$ és $G' = (V, E')$ két merev körű gráf, $G \subseteq G'$.

Ekkor

$$\sum_{\substack{I \subseteq V \\ I \text{ klikk } G'\text{-ben}}} (-1)^{|I|-1} P \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \leq \sum_{\substack{I \subseteq V \\ I \text{ klikk } G\text{-ben}}} (-1)^{|I|-1} P \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right).$$

A 2 klikkszámú merev körű gráfok (erdők) körében, mint láttuk, a Kruskal algoritmussal kereshető meg az optimális becslést adó gráf. Egy saját javaslatot mutatok be az alábbiakban, mellyel a Hunter-korlát javítható.

Induljunk ki egy M merev körű gráfból, mely nem teljes. Húzzunk be egy új élet úgy, hogy legfeljebb 1 új háromszög keletkezzen, és a kapott M' gráf ismét merev körű legyen. Ekkor M' legalább olyan jó becslést ad, mint M .

Ugyanis, ha nem keletkezett új háromszög, akkor M súlya az új él súlyával nőtt. Ha 1 új háromszög keletkezett, akkor M súlya az új él súlyával nőtt, és egy azt tartalmazó háromszög súlyával csökkent (így a háromszöghöz tartozó valószínűség kisebb mint az élhez tartozó). Tehát mindenképpen nőtt M súlya, és mivel M' is merev körű, ezért legalább olyan jó felső korlátot ad, mint M . A fent leírt műveletet többször végrehajtva nem romlik a kiinduló becslésünk, sőt általában javul.

Érdekes kérdés, hogy ha a kiindulási gráf egy fa volt, és addig hajtunk végre rajta ilyen műveleteket, amíg csak lehetőségünk van erre, akkor milyen típusú gráfot kapunk végeredményül. Mivel a művelet megtartja a merevkörűséget, ezért biztosan merev körű gráfot kapunk, jelölje ezt F^* (ami természetesen nem egyértelmű). F^* perfekt, ezért a klikk- és kromatikus száma megegyezik. Az is igaz, hogy $\chi(F^*) = \omega(F^*) = 3$.

Az világos, hogy a klikkszám legalább 3, ugyanis a műveletet egyszer végrehajtva háromszög keletkezik. K_4 nem lehet része F^* -nak, mert akkor kell lennie egy olyan lépésnek, amikor behúzzuk K_4 utolsó élét. De ekkor legalább 2 új háromszög jön létre, ami nem megengedett művelet. Bizonyítható, hogy F^* bármely két különböző csúcsa vagy szomszédos, vagy van két közös szomszédjuk, melyek szomszédosak.

Az így kapott gráfokkal javíthatunk a Hunter-korlátot, ha például maximális súlyú feszítőfából indulunk ki, de jelenleg nem létezik az optimális F^* -ot megtaláló algoritmus. Próbálkozhatunk mohó algoritmussal, vagyis minden lépésben a lehetséges élek közül a felső korlátot legjobban csökkentő élet húzzuk be. Azonban a legkevésbé sem garantált, hogy így a legjobban becslő F^* -ot kapjuk. Az optimális becslést adó F^* gráf talán megegyezik az optimális becslést adó, legfeljebb 3 kromatikus számú merev körű gráffal.

Most lássunk egy példát különböző merev körű gráfokkal adott becslésekre.

$$\begin{aligned}
 p_1 &= p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 0.38 \\
 p_{12} &= 0.21, p_{13} = 0.20, p_{14} = 0.19, p_{15} = 0.18, p_{23} = 0.17, p_{24} = 0.16, \\
 p_{25} &= 0.17, p_{34} = 0.18, p_{35} = 0.19, p_{45} = 0.20 \\
 p_{123} &= p_{124} = p_{125} = p_{134} = p_{135} = p_{145} = p_{234} = p_{235} = p_{245} = p_{345} = 0.11 \\
 P(\bigcup A_i) &= 0.88
 \end{aligned}$$

maximális csillaggal:	1.12
csúcsok sorrendjében úttal:	1.14
Hunter becslése:	1.1
3 klikkszámú merev körű gráffal:	0.89
4 klikkszámú merev körű gráffal:	0.93
5 klikkszámú merev körű gráffal:	1.15

Látható, hogy a 3 klikkszámú merev körű gráffal adott becslés elég éles volt, ám a klikkszám növelésével ez elromlott. A becslésben szereplő 3 klikkszámú gráfot a példa előtt ismertetett módszer mohó alkalmazásával kaptam.

4.1.1. A „k-out-of-n” típusú feladatok

A valószínűségi becslések egyik fontos alkalmazási területét adják a „k-out-of-n” típusú feladatok (lásd [1]). Az általános esetben egy n komponensű rendszer

meghibásodásának valószínűségét vizsgálják. r az úgynevezett ablak mérete, vagyis az n komponensből kiválasztott egymás utáni komponensek száma ($1 \leq r \leq n$). A rendszer hibáját az okozza, ha valamely ablak komponensei közül legalább k darab hibás ($1 \leq k \leq r$).

Jelölje A_i azt az eseményt, hogy az $i, i + 1, \dots, i + r - 1$ ablak komponensei közül legalább k darab hibás. Ekkor annak a valószínűsége, hogy az n elemű rendszer hibás: $P(A_1 \vee \dots \vee A_{n-r+1}) = P(\bigcup_{i=1}^{n-r+1} A_i)$. Tehát a rendszer meghibásodásának valószínűségére adott felső korlát számítható például Hunter-becsléssel, vagy egyéb merev körű gráfokat használó módszerrel. Ilyen jellegű rendszer például úrszondák által rendszeresen küldött adatsomagok sorozata.

4.2. Multifák

Ebben a fejezetben kicsit más irányból közelítjük meg a valószínűségi becslés problémáját. Multifának nevezett hipergráfokat fogok definiálni, melyek az előző esetekhez hasonlóan segítenek felső korlátot adni események uniójának valószínűségére (lásd [2]).

35. Definíció (Hipergráf). Legyen V tetszőleges halmaz, $\mathcal{P}(V)$ a hatványhalmaza, $E \subseteq \mathcal{P}(V)$. Ekkor a $H = (V, E)$ párt hipergráfnak nevezzük. V a H hipergráf csúcsainak, E pedig éleinek halmaza.

36. Definíció (m -multicseresznye). Legyen m pozitív egész szám. Az m -multicseresznye egy (V, E) hipergráf, ahol $V = \{v_1, \dots, v_{m+1}\}$, $E = \mathcal{E}_2 \cup \dots \cup \mathcal{E}_{m+1}$ és \mathcal{E}_i a V összes i csúcsú, v_{m+1} -et tartalmazó részhalmazaiból áll. A multicseresznye jelölése $(\{v_1, \dots, v_m\}, v_{m+1})$, domináló csúcsa v_{m+1} .

37. Definíció (m -multifa). Legyen m pozitív egész szám. Egy m -multifa egy $F_m = (V, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_{m+1})$ alakú hipergráf, ahol V a csúcsok halmaza, \mathcal{E}_i az i csúcsú hiperélek halmaza, és F_m -et a következő rekurziós lépésekkel állítjuk elő:

1. Induljunk ki egy $\Delta_m = (V^0, \mathcal{E}_2^0, \dots, \mathcal{E}_{m+1}^0)$ m csúcsú hipergráfból, melyre \mathcal{E}_i^0 V^0 összes i csúcsú részhalmaza, $\mathcal{E}_{m+1}^0 = \emptyset$. Ez a legkevesebb pontú m -multifa.
2. Ha $\Delta = (V, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_{m+1})$ egy m -multifa, akkor a $(\{v_1, \dots, v_m\}, v_{m+1})$ m -multicseresznye hozzávételével kapott hipergráf is m -multifa, ahol $v_1, \dots, v_m \in V$, v_{m+1} egy új csúcs (azaz $v_{m+1} \notin V$).

Mivel az 1-multicseresznye egy él a két rá illeszkedő ponttal, ezért az 1-multifák a közönséges fagráfok. Az is könnyen látható, hogy az $F_m = (V, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_{m+1})$ m -multifa gráfja, vagyis a (V, \mathcal{E}_2) gráf merev körű. Speciálisan a 2-multifák gráfját t -cseresznyefának nevezik (ilyenekről később lesz szó).

38. Definíció. Legyenek A_1, \dots, A_n tetszőleges események egy (Ω, \mathcal{B}, P) valószínűségi mezőn, $\Delta = (\{1, \dots, n\}, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_{m+1})$ egy n csúcsú m -multifa. Ekkor Δ súlya az $\{A_i\}_{i=1, \dots, n}$ eseményrendszerre vonatkozóan:

$$\begin{aligned} \omega(\Delta) = & \sum_{\{l_1, l_2\} \in \mathcal{E}_2} P(A_{l_1} \cap A_{l_2}) - \sum_{\{l_1, l_2, l_3\} \in \mathcal{E}_3} P(A_{l_1} \cap A_{l_2} \cap A_{l_3}) + \dots \\ & + (-1)^{m+1} \sum_{\{l_1, \dots, l_{m+1}\} \in \mathcal{E}_{m+1}} P(A_{l_1} \cap \dots \cap A_{l_{m+1}}). \end{aligned}$$

39. Tétel. Legyenek A_1, \dots, A_n tetszőleges események egy (Ω, \mathcal{B}, P) valószínűségi mezőn, $S_1 = \sum_{i=1}^n P(A_i)$, $\Delta = (\{1, \dots, n\}, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_{m+1})$ egy tetszőleges m -multifa. Ekkor $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq S_1 - \omega(\Delta)$.

A bizonyításhoz a szita formula és az m -multifa definíciója használható, ezt itt nem részletezem.

$m = 1$ esetén a $\Delta = (V, \mathcal{E}_2)$ maximális súlyú feszítőfával a Hunter-korlátot, $m = 2$ esetén pedig a t -cseresznyefa korlátot kapjuk vissza.

40. Tétel. *A $\Delta = (V, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_{m+1})$ m -multifa a $\Gamma = (V, \mathcal{E}_2)$ gráfja által egyértelműen meghatározott.*

Ez alapján minden m -multifát megadhatunk a gráfjával. Az is könnyen eldönthető, hogy egy G gráf m -multifa gráfja-e vagy sem.

Használjuk az algoritmushoz a multifák rekurzív felépítését. Ha G m csúcsú teljes gráf, akkor m -multifa. Ha m csúcsú nem teljes gráf, vagy kevesebb mint m csúcsa van, akkor nem m -multifa. Egyéb esetben keressünk G -ben egy m -edfokú csúcsot. Ha van ilyen, akkor hagyjuk el ezt G -ből és ismételjük meg az algoritmust az így kapott gráfra. Ha nincs ilyen csúcs, akkor G nem m -multifa.

A Hunter-becslésen javíthatunk, ha m -multifákat használunk ($m > 1$). Ez persze több metszetvalószínűség ismeretét igényli, így algoritmikusan lassabb. A következő tétel erre vonatkozik.

41. Tétel. *Tetszőleges legalább $m+2$ -csúcsú m -multifa $m+1$ -multifává egészíthető ki, azaz ha $\Delta = (V, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_{m+1})$ egy m -multifa és $|V| \geq m+2$, akkor létezik olyan $\Delta' = (V', \mathcal{E}'_2, \dots, \mathcal{E}'_{m+2})$ $m+1$ -multifa, melyre $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{E}'_i$, minden $i = 2, \dots, m+1$ esetén. Valamint a Δ' alapján adott felső korlát nem nagyobb, mint a Δ alapján adott.*

A kiegészítés úgy történik, hogy Δ rekurzív felépítésén a 2. lépéstől ($m+1$ csúcsú teljes gráf) végighaladva a megfelelő m -multicseresznyék helyett őket tartalmazó $m+1$ -multicseresznyéket kapcsolunk a már meglévő $m+1$ -multifához.

Az m -multifákkal történő becslést jól lehet használni például több dimenziós normális eloszlásfüggvény értékeinek meghatározására. (X_1, \dots, X_d) standard normális eloszlású, $d > 2$ dimenziós vektorváltozó, melynek eloszlásfüggvénye $F(x_1, \dots, x_d)$. Bevezetve az $A_i = P(X_i \geq x_i)$ eseményeket adódik, hogy $F(x_1, \dots, x_d) = P(X_1 < x_1, \dots, X_d < x_d) = P(\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_d) =$

$1 - P(A_1 \cup \dots \cup A_d)$. A $P(A_1 \cup \dots \cup A_d)$ valószínűsége adott felső korláttal tehát alsó korlátot nyerünk az eloszlásfüggvény értékeire.

4.3. Cseresznyefák

A valószínűségi becslésre egy újabb módszert biztosítanak a Bukszár József által bevezetett cseresznyefák (lásd [3]).

42. Definíció. A C gráf cseresznye, ha izomorf egy 3 hosszú úttal. C 2 fokú csúcsát középső csúcsnak nevezzük. Az u, v, w csúcsokkal rendelkező, v középső csúcsú cseresznye jelölése (u, v, w) .

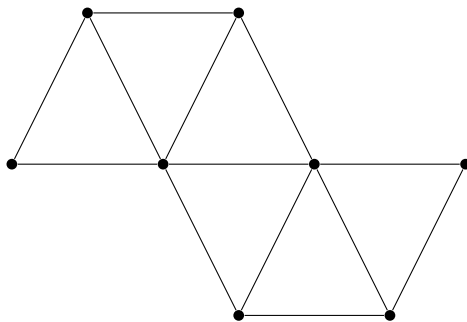
43. Definíció (Cseresznyefa). Egy $\Delta = (V, E, \mathcal{C})$ hármast cseresznyefának nevezünk, ha $\Gamma = (V, E)$ egyszerű gráf, \mathcal{C} Γ -beli cseresznyék halmaza, és Δ a következő rekurzióval kapható:

1. Két csúcs az őket összekötő éllel a legkevesebb csúcsú cseresznyefa, $\mathcal{C} = \emptyset$.
2. Ha $\Delta = (V, E, \mathcal{C})$ egy cseresznyefa, akkor $\Delta' = (V', E', \mathcal{C}')$ is cseresznyefa, ahol $V' = V \cup \{u\}$, $u \notin V$, $E' = E \cup \{uv_1, uv_2\}$ valamely $v_1, v_2 \in V$ csúcsokkal, $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cup \{(v_1, u, v_2)\}$.

Γ a Δ cseresznyefa gráfja.

Tetszőleges cseresznyefában pontosan egy él van (a kiindulási él), mely nem éle semelyik cseresznyének, és pontosan két csúcs van, mely nem középső csúcsa semelyik cseresznyének (a kiindulási két csúcs). Lehetséges, hogy egy adott cseresznyefa többféle rekurziós lépéssorozattal is előállítható, és nem biztos, hogy egyértelműen meghatározott a gráfja által.

Az előző fejezetekben látottakhoz hasonlóan legyen a $\Delta = (V, E, \mathcal{C})$ n csúcsú cseresznyefa i -edik csúcsához hozzárendelve az A_i esemény, $i = 1, \dots, n$.



6. ábra. Egy cseresznyefa (egyben t -cseresznyefa is)

44. Definíció. A $\Delta = (V, E, \mathcal{C})$ cseresznyefa súlya:

$$\omega(\Delta) = \sum_{ij \in E} P(A_i \cap A_j) + \sum_{(i,j,k) \in \mathcal{C}} P(A_i \cap A_j \cap A_k).$$

45. Tétel. Ha Δ_1 és Δ_2 két olyan cseresznyefa, melyek gráfja megegyezik, akkor $\omega(\Delta_1) = \omega(\Delta_2)$.

Ez majd hasznos lesz a valószínűségi becsléseknél, ugyanis elég lesz a cseresznyefa gráfját ismerni.

46. Definíció. Egy $\Delta = (V, E, \mathcal{C})$ cseresznyefa t -cseresznyefa, ha $\forall (i, j, k) \in \mathcal{C}$ cseresznyére $ik \in E$.

A t -cseresznyefák pontosan az előző fejezetben ismertetett 2-multifák, melyek merev körűek.

47. Tétel. Tetszőleges $\Delta = (V, E, \mathcal{C})$, $V = \{1, 2, \dots, n\}$ cseresznyefára teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i) - \omega(\Delta).$$

Bizonyítás: Egészítsük ki Δ -t t -cseresznyefává úgy, hogy minden cseresznyéjének behúzzuk a harmadik élét, ha az hiányzik. Legyen az újonnan behúzott élek halmaza $E' = \{e_1, \dots, e_j\}$, az új t -cseresznyefa Δ' . Mivel Δ' merev körű, ezért teljesül rá a $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{ij \in E \cup E'} P(A_i \cap A_j) + \sum_{(i,j,k) \in \mathcal{C}} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$ egyenlőtlenség. Ha a jobb oldalhoz hozzáadjuk a $\sum_{ij \in E'} P(A_i \cap A_j)$ összeget, akkor pont $\sum_{i=1}^n P(A_i) - \omega(\Delta)$ -t kapjuk, és az egyenlőtlenség továbbra is érvényben marad. \square

Megjegyzés: Az előző tétel miatt elég Δ gráfját ismerni, az ugyanis egyértelműen meghatározza a cseresznyék csúcshalmazait (csak a csúcsok sorrendjét nem).

5. Áttekintés

Mint azt az eddigi fejezetekben láthattuk, a merev körű gráfok sokrétűen alkalmazhatók a matematika különböző területein. A gráfelmélet számára önmagukban is érdekesek strukturális sajátosságaik miatt. A merev körű gráfok osztálya perfekt, és sok más, nevezetes gráfosztályt magában foglal, mint például a split gráfok vagy az intervallum gráfok osztályát.

Bebizonyítottam, hogy a $[Csillag \subset Csillag]$ gráfok pontosan a split gráfok. Tudjuk, hogy $[Út \subset Út]$ pontosan az intervallum gráfok halmaza. Mivel a fák körében a csillagok és utak duális viszonyban vannak, ezért a split és intervallum gráfok halmaza is valamiféle dualitást örököl a merev körű gráfok körében. Sajnos ezen témának részletes tárgyalása nem fért bele a szakdolgozat kereteibe.

Numerikus módszerek alkalmazása során gyakran kell olyan lineáris egyenletrendszereket megoldani, melyek együtthatómátrixa ritka, azaz n ismeretlen esetén kevesebb, mint $O(n^2)$ nemnulla együtthatójuk van. Ilyen feladatok például bizonyos parciális differenciálegyenletek numerikus megoldása vagy interpolációs polinomok együtthatóinak számítása. A merev körű gráfok alaptételét, a Dirac-tételt felhasználva gyorsíthatjuk a Gauss-eliminációt, akár $O(n)$ flopra³ is. Az optimális merev körű gráf megtalálása azonban a fa-szélesség NP-teljes problémájára vezet.

Egy másik, napjainkban is aktívan vizsgált alkalmazási terület a valószínűségi becslések elmélete. Általánosságban az a feladat, hogy események valamilyen Boole-függvényének valószínűségére könnyen számítható alsó illetve felső becslést adjunk. Ebben a dolgozatban események uniójának felső becsléséről esett szó. Beszélhetünk aggregált és nem aggregált becslésekről attól függően, hogy milyen típusú valószínűségek ismeretét feltételezzük a feladat megoldásakor. Érdekes kérdés lehet, hogy a becslést a tényleges valószínűséghez, vagy az előre adott adatokból számolható legjobb becsléshez

³flop: floating point operation, azaz lebegőpontos művelet

viszonyítsuk. A legjobb becslést ugyanis megkaphatjuk egy nagy méretű lineáris programozási feladat megoldásaként (természetesen ez nem tesz eleget a „könnyen számítható” kitételnek).

A becslést célszerűbb gráfelméleti megfontolásokra alapozni. A Hunter-korlát fagráfokat, az újabb korlátok (m -multifa, t -cseresznyefa) pedig merev körű gráfokat használnak. Ezzel élesebb becslés érhető el, mint feszítőfákkal, ám nem ismert általános esetben az optimumot adó gráf megkeresésére szolgáló polinomiális algoritmus.

Egyik fő célomként ismertettem Boros és Veneziani eredményét, miszerint bármely merev körű gráffal érvényes felső becslés nyerhető. Veneziani ezt tárgyaló cikkeiben ennek bizonyítása meglehetősen hosszú, ugyanis az állítást lineáris programozási feladatra vezeti vissza. Sikerült egyszerűbb, tisztán kombinatorikus bizonyítást adnom erre a tételre. Ennek az állításnak egy általánosabb alakja kevéssel Veneziani cikkei előtt megjelent Dohmen habilitációjában és könyvében, így ezt az eredményt neki is tulajdoníthatjuk (lásd [8], [10]).

Témavezetőm, Hujter Mihály ötletéből kiindulva általános módszert javasoltam a Hunter-becslés javítására. Nyitott kérdés a módszer által szolgáltatott gráfok karakterizációja, például tiltott részgráfokkal. A karakterizáció segítségével talán polinomiális algoritmus is kapható az optimális becslést adó ilyen típusú gráf megkeresésére.

Ismertettem néhány alapvető eredményt az m -multifákkal és cseresznyefákkal kapcsolatban. Sok tekintetben ezek igen megbízható módszerek.

A dolgozatomban nem szereplő alkalmazások közül említeném a rúdrendszerek merevségének vizsgálatát, mely szoros kapcsolatban áll a matroidok és hipergráfok elméletével. A merev körű gráfok alkalmazása napjainkban is intenzíven kutatott, szerteágazó területe a matematikának, melyben még sok nyitott probléma vár megválaszolásra. Ezek főleg optimalitási illetve algoritmuselméleti kérdések.

Hivatkozások

- [1] A. Habib, Szántai Tamás, *Új korlátok a speciális "consecutive k-out-of-n: F" rendszerek megbízhatóságára*, Budapest, 1998, Alkalmazott matematikai lapok, **19** 39–61.
- [2] Bukszár József, *Multifákkal adott valószínűségi korlátok*, Miskolc, 2000, Alkalmazott matematikai lapok, **20** 45–60.
- [3] Bukszár József, Prékopa András, *Probability bounds with cherry trees*, U.S.A., 2001, Mathematics of operations research, **26** 174–192.
- [4] Mádi-Nagy Gergely, *On multivariate discrete moment problems: generalization of the bivariate min algorithm for higher dimensions*, 2009, SIAM J. Optim., **19** 1781–1806.
- [5] D. Hunter, *An upper bound for the probability of a union*, Israel, 1976, J. Appl. Prob., **13** 597–603.
- [6] Hujter Mihály, *Perfekt gráfok és alkalmazásaik*, Aula kiadó, Budapest, 2003.
- [7] J. T. Chen, *A lower bound using Hamilton-type circuits and its applications*, Israel, 2003, J. Appl. Prob., **40** 1121–1132.
- [8] K. Dohmen, *Improved inclusion-exclusion identities and Bonferroni inequalities with applications to reliability analysis of coherent systems*, Berlin, 2000.
- [9] Katona Gy., Recski A., Szabó Cs., *A számítástudomány alapjai*, Typotex, Budapest, 2006.

- [10] P. Veneziani, *Graph-based upper bounds for the probability of the union of events*, Brockport, NY, US, 2008, The electronic journal of combinatorics, **15** #R28
- [11] P. Veneziani, *Optimality conditions for Hunter's bound*, Brockport, NY, US, 2008, Discrete mathematics, **308** 6009–6014.
- [12] S. Hougardy, *Classes of perfect graphs*, Berlin, 2006, Discrete Mathematics, **306** 2529–2571.