

SZAKDOLGOZAT

Egybevágó körök pakolásai négyzetekbe

Szeidl Rita Betti

matematika szakos hallgató

Témavezető: Dr. Hujter Mihály
docens
BME Matematika Intézet,
Differenciálegyenletek Tanszék



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

2011

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
2. A feladat története	4
3. A probléma és annak ekvivalens modelljei	9
3.1. Geometriai modellek	9
3.2. Matematikai programozási modellek	11
4. Számítógépes eljárások az alsó korlát javítására	12
4.1. Az energiafüggvény minimalizálás	12
4.2. Perturbációs algoritmus	13
4.3. Biliárd-szimuláció	14
4.4. A PDS-algoritmus (Pulsating Disk Shaking)	14
4.5. A TAMSASS-PECS algoritmus	15
5. Ismétlődő minták a körpakolásokban	16
5.1. A $\mathbf{PAT}(k^2 - l)$ ($l = 0, 1, 2$) mintaosztályok	17
5.2. Az $\mathbf{STR}(k^2 - l)$ ($l = 3, 4, 5$) struktúraosztályok	20
5.3. A $\mathbf{PAT}(k(k + 1))$ mintaosztály	23
5.4. A $\mathbf{PAT}(k^2 + \lfloor k/2 \rfloor)$ mintaosztály	24
5.5. Összegzés	25

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Hujter Mihálynak, aki észrevételeivel és tanácsaival segítette munkámat, valamint rendelkezésemre bocsátotta a dolgozat elkészüléséhez szükséges szakirodalmat.

Köszönöm szüleimnek és hugomnak, hogy szeretetükkel támogattak egyetemi tanulmányaim alatt. Köszönöm a barátaimnak, Bertának, Dávidnak és Gyulának, hogy együtt éltük át az egyetem jó, bár néha nehéz napjait, valamint köszönöm Máténak a türelmét, segítőkészségét és a pozitív hozzáállását.

Végül de nem utolsó sorban szeretném hálásan megköszönni a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Természettudományi Kara valamennyi oktatójának, dolgozójának azt a lelkiismeretes munkáját, amivel a hallgatók képzését, tanulását és a versenyképes tudás megszerzését támogatják.

1. fejezet

Bevezetés

Az alkalmazott matematikai módszerek lehetőséget adnak arra, hogy a hétköznapi életben felmerülő bonyolult problémákat egyszerű modellekként tudjuk kezelni. A természettudományokban, a mérnöki tervezésben és a mindennapi életben is számos helyzet vezet olyan matematikai feladatokhoz, ahol egybevágó alakzatokkal kell egy adott tartományt a lehető legsűrűbben kitölteni.

A kereskedelem globalizációja miatt egyre fontosabb logisztikai probléma azonos méretű tárgyak elhelyezése és tárolása, hiszen egy multinacionális cég terjeszkedése esetén a nagy távolságok miatt célszerű a szállítási költség minimalizálására törekedni, melyet úgy is elérhetünk, hogy egy teherautó vagy egy hajó rakterében biztosítjuk a maximális helykihasználást. Üvegek, gázpalackok vagy konzervdobozok megfelelő módon történő elrendezése megnövelheti az importálható vagy exportálható mennyiséget. A technológia fejlődésével a XXI. században korábban nem ismert problémákkal találkozhatunk. Ilyen például a rádióállomások és mobilkommunikációs tornyok megfelelő elhelyezése. A telekommunikációs hálózatok az ország területén minél nagyobb lefedettséget szeretnének biztosítani, minél kevesebb toronnyal, így időt és pénzt takaríthatnak meg. Hasnlóképpen foglalkozhatunk egy olyan rádióadó megtervezésével, melyet az egész országban lehet fogni. A tornyok számának minimalizálása egyúttal az interferenciát is csökkenti. Ezeket a feladatokat optimális körelhelyezések keresésére vezethetjük vissza.

Dolgozatomban egybevágó körök egységnyezetbe való pakolásait vizsgálom és az ezzel kapcsolatos kutatásokat mutatom be. A problémával már az 1700-as évek óta foglalkoznak a tudósok, és a feladat napjainkra egyre népszerűbbé vált, felismerve számos alkalmazását a mindennapokban. A második fejezetben problémával foglalkozó matematikusok eredményeit mutatom be.

A feladatot geometriai modellekkel körpakolásként és pontelhelyezésként is leírhatjuk, valamint vizsgálhatjuk globális optimalizálási feladatként. Ezeknek az ekvivalens meg-

közelítésnek a modelljeit írom le a harmadik fejezetben.

A körök számának növekedésével egyre nehezebbé vált tisztán matematikai eszközökkel keresni az optimális pakolásokat. A kutatók ezért számítógépes algoritmusok segítségével közelítik a megoldást. Ezek közül a módszerek közül ismertetek néhányat a negyedik fejezetben.

A megismert pakolások között ismétlődő mintákat figyelhetünk meg. Ezen minták segítségével új alsó korlátokat kapunk a pontok közötti minimális távolság maximumára. Az ötödik fejezetben bemutatok néhány már ismert mintaosztályt, valamint struktúraosztályt, és az ezekhez tartozó alsó korlátokat.

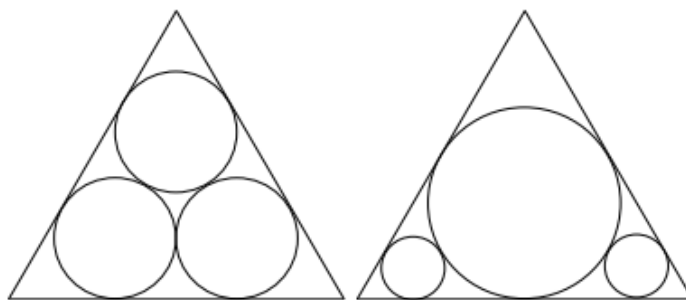
Ez a dolgozat könnyen áttekinthető összefoglalását adja a körpakolási feladatokkal kapcsolatos eddigi eredményeknek. A témakör azonban még kiaknázatlan, így számos kutatási téma alapjául szolgálhat.

2. fejezet

A feladat története

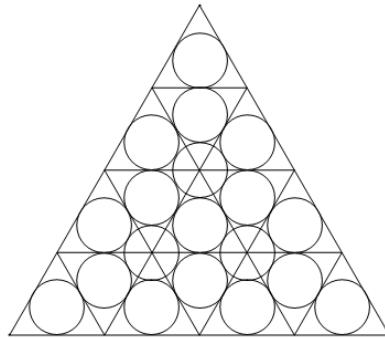
A körpakolási feladatokkal kapcsolatos vizsgálatok a matematikai irodalomban messzire nyúlnak vissza.

Az európai matematikában az első optimális körpakolás keresésére vonatkozó feladat a híres Malfatti-probléma. 1803-ban *G. Malfatti* (1731-1807) vetette fel, hogy hogyan lehet három henger (amelyek lehetnek különböző méretűek is) egy adott derékszögű háromszög alapú hasábjából kivágni úgy, hogy a lehető legnagyobb legyen a térfogatuk összege. *Malfatti* úgy gondolta, hogy a megoldás itt nem más, mint megadni egy derékszögű háromszögben 3 olyan kört, amelyek páronként érintik egymást, és minden kör a háromszög két oldalát is érinti. Az ilyen köröknek tetszőleges háromszögben való megszerkesztésének a feladata Malfatti-probléma néven vált ismertté a matematikai irodalomban. Ezt a problémát azonban korábban már *C. Ajima* (1732-1798) japán matematikus is felvetette és meg is oldotta. Érdekes, hogy több mint 100 év múlva jöttek csak rá, hogy az előbbi Malfatti-körök nem feltétlenül a legsűrűbb körpakolást jelentik három, esetleg nem azonos sugarú körnek a háromszögben. *H. Lob* és *H. W. Richmond* 1930-ban megmutatták, hogy szabályos háromszögben nem a Malfatti-körök adják a legsűrűbb körpakolást.



2.1. ábra. A Malfatti körök és egy annál sűrűbb pakolás szabályos háromszögben

Bolyai Farkas (1775-1856) magyar matematikus volt az első, aki egy körpakolási sorozat sűrűségét vizsgálta korlátos tartományban. Az 1832-33-ban kiadott, röviden csak 'Tentamen'-ként emlegetett híres munkájában 19 körnek egy szabályos háromszögben való elhelyezésével találkozhatunk. Az általa adott körpakolást úgy kaphatjuk meg, hogy felosztjuk a háromszög oldalait 4 egyenlő részre és az osztópontokat az oldalakkal párhuzamos egyenesekkel összekötjük. Ha a keletkezett kis háromszögekben tekintjük azok beírható körét, akkor még további 3 kört tehetünk azokra a helyekre, amelyeket hat másik kör vesz körül ugyanakkora sugárral.



2.2. ábra. Bolyai példája

Bolyai Farkas az említett művében azt a kérdést vizsgálta, hogy ha az oldalak felosztását a végtelenhez tartjuk, akkor hogyan fog a háromszög körökkel nem fedett területe változni. A pakolás sűrűsége $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$ értékhez konvergál.

Érdekes történeti kérdés, hogy *Bolyai Farkas* miért foglalkozott ezzel a feladattal, hiszen a korabeli matematikai irodalomban nyomát sem találjuk ennek. Matematikatörténeti kutatások szerint az 1820-as erdészeti főfelügyelői állás megpályázása miatt kezdett el komolyabban kertészeti és erdészeti tanulmányokat folytatni, így feltehetőleg ennek eredményeként jutott el ahhoz a kérdéshez is, hogy hogyan ültessünk be egy területet úgy fákkal, hogy az a lehető legsűrűbb legyen, de a fák egymás életterét mégse vegyék el.

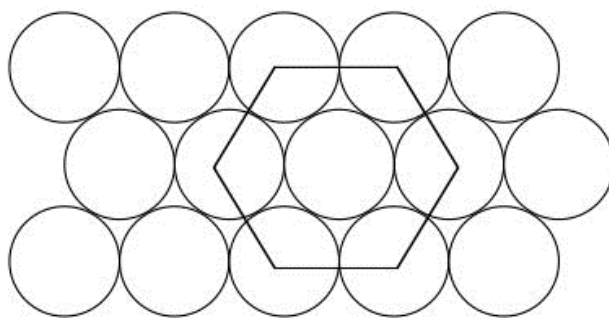
Körpakolásokkal kapcsolatos matematikai feladatokkal nemcsak Európában foglalkoztak. Az Edo-korszakban (1603-1867) készült japán szangakuk szintén sok körpakolási feladatot tárgyalnak. A szangaku japánul matematikai táblát jelent. Ezek olyan művészi igényességgel elkészített fatáblák, amelyeken elsősorban geometriai problémákat tárgyaltak, és sintoista szentélyekben, vagy Buddhista templomokban helyezték el azokat, általában a tetőnél felfüggesztve. Eredeti rendeltetésük még nem egyértelműen világos a kutatók előtt, de valószínűleg meditációs célokat szolgáltak. A táblákon csak a problémák megfogalmazása szerepel egy-egy ábrával illusztrálva, bizonyítás nélkül, így a szentélybe bevonuló hívőt matematikai elmélkedésre ösztönözték.



2.3. ábra. Egy japán szangaku

A sík egybevágó körökkel való legsűrűbb kitöltésére megoldást először A. Thue (1863-1922) norvég matematikus közölt. Bizonyítható, hogy a sík egybevágó körökkel úgy tölthető ki a legsűrűbben, ahogy azt az emberi intuíció is sugallja, tehát ha minden kört hat másik vesz körül és a körök így hexagonális struktúrában helyezkednek el. Azt, hogy az ilyen struktúrájú körpakolás adja a legsűrűbb rácspakolást a síkon, már J. L. Lagrange (1736-1813) is igazolta 1773-ban.

A hexagonális pakolás sűrűsége megegyezik a Bolyai Farkas által vizsgált körpakolási sorozat sűrűségének határértékével, $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$ -vel. Thue bizonyítása nem volt egészen meggyőző, egzakt bizonyítást a tételre a hazai diszkrét geometria első nagy művelője, Fejes Tóth László (1913-2005) adott 1940-ben.



2.4. ábra. A sík egybevágó körökkel való legsűrűbb kitöltése

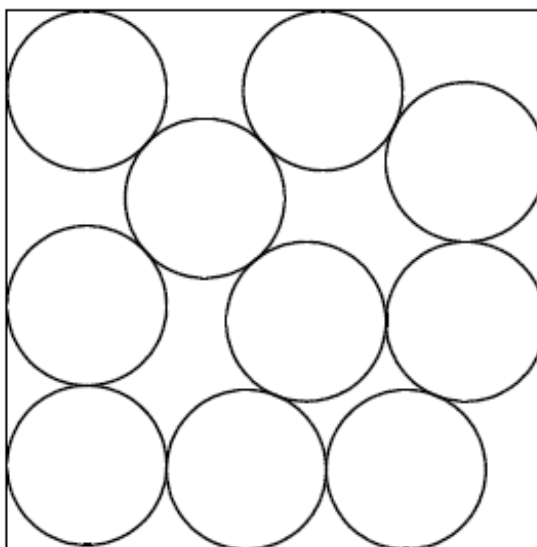
Korlátos tartományban való körpakolásokat konkrét alakzatok esetében elsősorban négyzetben, körben, szabályos és egyenlőszárú derékszögű háromszögben, valamint téglalapban vizsgáltak.

A körpakolási feladatok általánosíthatóak magasabb dimenziókra is. A Kepler-probléma három dimenzióban vizsgálja, milyen módon rendeződhetnek el a gömb alakú részecskék a lehető legkisebb teret elfoglalva. Kepler szerint az úgynevezett lapcentrált kockarács a lehető leggazdaságosabb elrendezés. Ez az elrendezés 74%-os kihasználtságot biztosít.

A matematikusok ma sem tudják bizonyítani, hogy ez az elrendezés minden lehetséges elrendezés közül a legjobb. A *Kissing Number* problémaosztály többdimenziós általánosítás, amely arról szól, hogy hány hipergömb érinti egymást, ha a rácspontokba a lehető legnagyobb sugarú egybevágó gömböket helyezünk. A körpakolási problémának lehet olyan felvetése, amely valamely nemeuklideszi geometriában (például a hiperbolikus geometriában) tárgyalja a kérdést, bár ebben az esetben már a sűrűség fogalmának definiálása is nehézséget okoz. A problémát megfogalmazhatjuk az euklideszi síkon úgy is, hogy az euklideszi távolság helyett valamilyen más metrikát vezetünk be. Ezek az általánosítások matematikai szempontból érdekesek, de a gyakorlati alkalmazásokhoz közelebb áll a probléma eredeti formájának vizsgálata, illetve annak háromdimenziós gömbpakolási általánosítása.

Azt a kérdést, hogy hogyan helyezzünk el egybevágó köröket egy négyzetben először *Lázár Dezső* magyar matematikus vetette fel 1930-ban, de korai halála miatt nem tudta publikálni. A probléma első megjelenése a matematikai irodalomban *Leo Moser* sejtése volt, amely 1960-ban jelent meg. *Moser* 8 kör optimális elhelyezését sejtette meg, amit *J. Schaer* és *A. Meir* igazoltak 1965-ben.

Az $n = 10$ esettel több kutató is foglalkozott, fokozatosan javítva az eredményeken, és bár egy számítógépes eljárás segítségével már sikerült megtalálni az optimális elrendezést, azonban még hiányzik egy tisztán matematikai eszközöket használó megoldás. *Hujter Mihály* 1999-ben kiadott cikkében azt a legkisebb oldalhosszúságú négyzetet kereste, amely tartalmaz 10 egymást nem fedő, egybevágó, egységsugarú kört. Kombinatorikai eszközökkel a korábban sejtett 3,3737... oldalhosszt javította 3,334-re.



2.5. ábra. 10 kör optimális pakolása.

Az optimális pakolások $n = 30$ -ig ismertek. Az $n = 2, \dots, 6, 8, 9, 14$ és 16 eseteket hagyományos matematikai eszközökkel is megoldották már, míg a többi eredményt számítógépes algoritmusok segítségével kapták meg.

Közelítő megoldásokat (azaz olyan pakolásokat, melyekre még nem igazolták az optimalitást) az első 200 esetre ismernek. A megtalálásukhoz számos különböző numerikus módszert alkalmaztak, például a biliárd-szimulációt, energiafüggvény minimalizálást, vagy nemlineáris programozási feladatokat megoldó szoftvereket. Bár nem tudjuk, hogy ezek a megoldások optimálisak, mégis ezek az eredmények segítenek javítani a megoldásokon, mert a segítségükkel jobb alsó korlátokat tudunk megadni az optimális megoldásra.

3. fejezet

A probléma és annak ekvivalens modelljei

3.1. Geometriai modellek

Az egybevágó körök négyzetbe pakolásának problémáját az egységnégyzetben fogjuk tárgyalni. Ez nem jelent megszorítást a feladatokat illetően, hiszen hasonlósági transzformációval a körpakolások és pontelhelyezések tetszőleges oldalhosszúságú négyzetbe transzformálhatók.

A probléma a következő ekvivalens modellekkel írható le:

Körpakolásként:

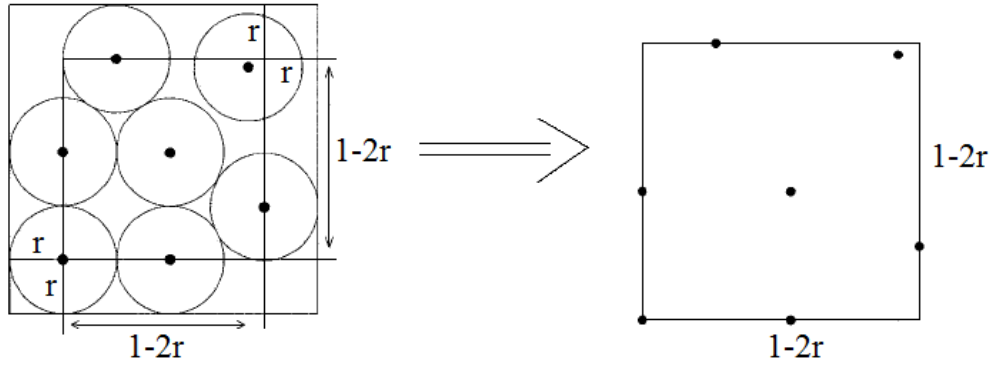
1. Keressük meg azt a maximális r_n sugarat, hogy n egybevágó, egymást nem fedő r_n sugarú kör elhelyezhető legyen egy egységnégyzetben.
2. Adjuk meg azt a legkisebb s_n oldalú négyzetet, amely n egybevágó, egymást nem fedő egységsugarú kört tartalmaz.

Pontelhelyezésként:

3. Helyezzünk el n pontot az egységnégyzetben úgy, hogy bármely két pont között lévő m_n minimum távolság maximális legyen.
4. Határozzuk meg azt a legkisebb σ_n oldalú négyzetet, amely tartalmaz n pontot, amelyek kölcsönös távolsága legalább 1.

Ezekből az állításokból könnyen belátható, hogy a definiált m_n , r_n , s_n , és σ_n paraméterek között az alábbi egyenlőségek állnak fenn:

$$r_n = \frac{m_n}{2(m_n + 1)}, m_n = \frac{2r_n}{1 - 2r_n}, s_n = \frac{1}{r_n} \text{ és } \sigma_n = \frac{1}{m_n}.$$



3.1. ábra. Minden körpakolás megfelel egy pontelhelyezésnek.

1. Definíció. Egy n darab r_n sugarú kört tartalmazó egységnégyzetbe való körpakolás sűrűségét a

$$d_n = nr_n^2\pi$$

képlettel definiáljuk.

A problémát a maximális sűrűségű körpakolás kereséseként is megfogalmazhatjuk.

A továbbiakban két körpakolást *azonosnak* tekintünk, ha van olyan szimmetria-transzformáció és indexpermutáció, amelyekkel azok egymásba vihetők. Geometriaival könnyen belátható két pakolás azonossága, de a numerikus módszereknél nehézséget okozhat, hogy egy helyes megoldást csak egyszer írjunk fel.

2. Definíció. Egy körpakolásban egy kört *szabad körnek* mondunk, ha a kör középpontjának van olyan környezete, amelyen belül a középpontot mozgatva a kör a négyzet belsőjében marad és nem lesz közös pontja más körrel.

3. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy kör *rögzített*, ha nem szabad kör. Egy pakolás *merev*, ha benne minden kör rögzített.

Ha egy pakolás egy vagy több szabad kört tartalmaz, akkor a megoldás nem egyértelmű. Továbbá a szabad körök lehetséges középpontjai egy nemüres belső és összefüggő halmazt alkotnak.

4. Definíció. Azt mondjuk, hogy két kör *érintkezik* egy pakolásban, ha középpontjaik távolsága $2r_n$.

3.2. Matematikai programozási modellek

A négyzetben való legsűrűbb körpakolás problémája egyrészt egy geometriai feladat, másrészt egy globális optimalizálási probléma.

Azt a problémát, hogy maximalizáljuk az n pont távolságát az egységnégyzetben, a következő folytonos nemlineáris korlátos globális optimalizálási feladattal tudjuk leírni:

$$\begin{aligned} \mu(x, y) &= \min_{1 \leq i, j \leq n} \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \\ \max \mu(x, y) \\ x, y &\in [0, 1]^n, n > 1, n \text{ egész,} \end{aligned}$$

ahol x_i, y_i az i . pont koordinátái. A cél nemcsak az, hogy megkapjuk a bármely két pont közötti minimális távolság maximumát, hanem hogy megtaláljuk az n pont viszonylagos helyét az egységnégyzetben (az x_i, y_i koordinátákat; $1 \leq i \leq n$).

A probléma leírható még max-min optimalizálási feladatként a következőképpen:

$$\max_{x_i, y_i} \min_{1 \leq i < j \leq n} d_{i,j}$$

feltéve, hogy

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} &= d_{i,j} \quad (1 \leq i < j \leq n) \\ 0 &\leq x_i, y_i \leq 1, \text{ és } 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

A kutatások azt mutatták, hogy azok a módszerek voltak hatékonyak a négyzetben való legsűrűbb körpakolási feladat egy-egy speciális esetének megoldására, vagy jó közelítő megoldás keresésére, amelyek nemcsak az optimalizálási modelljét alkalmazták a feladatnak, hanem erősen kihasználták a probléma geometriai jellegét, és az abból eredő matematikai következményeket. A következő fejezetben ezekből a módszerekből ismertetek néhányat.

4. fejezet

Számítógépes eljárások az alsó korlát javítására

Az optimális körpakolásokat megtalálni és optimalitásukat igazolni nehéz feladat. Elméleti úton az alábbi alsó korlát adható meg az optimális pontelhelyezések pontjai között szereplő távolságok minimumának $\overline{m}_n$ maximumára:

5. Tétel. Minden $n \geq 2$ egész számra és az $\overline{m}_n$ távolságértékre

$$\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}n}} < m_n.$$

Ezt az eredményt bizonyos n -ek esetén tovább tudták javítani számítógépes eljárások, sztochasztikus és globális optimalizálási algoritmusok segítségével. Ebben a fejezetben ezek közül a módszerek közül mutatok be néhányat.

4.1. Az energiafüggvény minimalizálás

Az optimális pontelhelyezés keresésének matematikai programozási modelljét a következő alakban írhatjuk fel:

$$\max \min_{1 \leq i < j \leq n} \|s_i - s_j\|$$

ahol

$$s_i \in [0, 1]^2, 1 \leq i \leq n.$$

Mivel $\min_{1 \leq i < j \leq n} \|s_i - s_j\| = \lim_{p \rightarrow -\infty} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} \|s_i - s_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$, ezért a feladat célfüggvénye a

következő alakra hozható:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{\|s_i - s_j\|^k}.$$

Ez a célfüggvény értelmezhető potenciál-, vagy energiafüggvényként. A fizikai értelme ennek a megközelítésnek az, hogy kezeljük a pontokat elektromos töltéseként (mind pozitív, vagy mind negatív), amik taszítják egymást. Ha a töltött részecskék közötti minimális távolság nő, akkor a potenciálfüggvény megfelelő értéke csökken. *K. J. Nurmela* és *P. R. J. Östergård* egy hasonló energiafüggvényt használtak rögzített nagy m -re:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\lambda}{\|s_i - s_j\|^2} \right)^p.$$

Az $x_i = \sin x'_i$ és $y_i = \sin y'_i$ helyettesítéssel ez egy megszorítás nélküli optimalizálási problémává alakítható az x'_i, y'_i változókkal, ahol a körök középpontjainak a koordinátái kielégítik a következő feltételeket: $-1 \leq x'_i \leq 1, -1 \leq y'_i \leq 1$. *Nurmela* és *Östergård* az első 50 esetre határozták meg a körpakolásokat, az optimalizációhoz a Goldstein-Armijo lineáris kereső és a Newton-módszer kombinációját használták fel.

4.2. Perturbációs algoritmus

D. W. Boll és szerzőtársai az alábbi sztohasztikus algoritmus segítségével adtak javított értéket az $n = 32, 37, 48$ és 50 esetekre. Eljárásukat (megfelelő módosításokkal) általánosan is lehet használni az n dimenziós euklideszi tér egy korlátos tartományában való legsűrűbb (hiper)gömbpakolás problémájának megoldására.

1. lépés: Tekintsünk egy véletlen pontelhelyezést az egységnégyzetben, és definiáljuk a kezdő lépéshosszt, $s = 0.25$.
2. lépés: Minden pontra:
 - a) perturbáljuk a pont helyét az s hosszal észak, dél, kelet és nyugat irányokban,
 - b) ha a mozgás során a pont távolsága nőtt a hozzá legközelebbi szomszédjától, akkor tartsuk meg az új helyet.
3. lépés: Ismételjük meg a 2. lépést mindaddig, amíg van olyan pont, amelyet lehet mozgatni.
4. lépés: Legyen $s := s/1.5$. Ha $s > 10^{-10}$ folytassuk az eljárást a 3. lépéssel.

A fenti egyszerű algoritmussal néhány millió iteráció után jó körpakolásokat lehet megadni.

4.3. Biliárd-szimuláció

Az algoritmus szemléltetéséhez tekintsük a pontok egy véletlen elrendezését a négyzetben. Rajzoljunk egybevágó köröket a pontok köré úgy, hogy azok ne fedjék egymást. Minden kört tekinthetünk egy olyan gömbnek (biliárdgolyó), melynek adott a kezdeti sugara, mozgási iránya és sebessége. Indítsuk el a golyókat (kétdimenziós problémára visszavezetve korongokat), és lassan növeljük a közös sugarat. A folyamat során a gömbök mozgástere egyre kisebb és kisebb lesz. Ezt egészen addig folytassuk, ameddig a pakolás egy része (vagy a teljes pakolás) rögzítetté nem válik. *R. L. Graham* és *B. D. Lubachevsky* biliárd-szimulációs eljárásuk felhasználásával az első 50 esetre (és néhány további) adtak az optimálisához közelítő új pakolásokat.

4.4. A PDS-algoritmus (Pulsating Disk Shaking)

Közismert, hogy 3 dimenzióban a gömbök legsűrűbb pakolását úgy is elérhetjük, hogy összerázzuk őket. Ezt a természetes megközelítést szimulálták számítógépen 2 dimenzióban a közel optimális elrendezések megtalálására.

A PDS-algoritmus hasonló a biliárd-szimulációhoz. Ebben a módszerben is egybevágó körök egy halmazából indulunk ki. Két kör kapcsolata (érintik egymást, fedésben vannak, vagy egyik sem) egyértelműen meghatározható a középpontjaik távolságából. A módszer megértéséhez tekintsünk n darab kis sugarú, egymást nem fedő, egybevágó kört az egységnyezetben. Növeljük meg a körök r sugarát egy konstans rátával. Ez tisztán geometriai közelítés, így az időnek és a sebességnek nincs szerepe. Ezután "rázzuk össze" őket. Páronként mérjük le a körök középpontjainak, valamint a körök és a négyzet oldalainak d távolságát. Ezután számoljuk ki a teljes átfedést (azaz a körök egymásba nyúlásának teljes hosszát) az alábbi módon:

$$ovl_t = \sum_{ovl \leq 0} ovl,$$

ahol

$$ovl = \begin{cases} d - 2r & \text{két kör között,} \\ d - r & \text{egy kör és a négyzet oldala között.} \end{cases}$$

Ha a ciklus során nő az átfedés abszolútértéke, akkor csökkentjük a közös sugarat egy állandó aránnyal, egyébként növeljük. Így az aktuális sugár pulzálni fog. A folyamat akkor áll le, ha a pulzálás amplitúdója elég kicsi, tehát elértük a kívánt pontosságot,

vagy a ciklusok száma meghaladja a megadott maximumot. Ezzel a módszerrel a pakolás sűrűsége egy rögzített esethez fog tartani.

A PDS algoritmussal az $n = 200$ esetig vizsgálták a pakolásokat. 66 esetben az eredmény megegyezett a korábban kapottal, 24 esetben rosszabb volt annál. 110 esetben sikerült javítani az alsó korláton, ami azt bizonyítja, hogy ez egy jó módszer.

4.5. A TAMSASS-PECS algoritmus

A körpakolási probléma tekinthető úgy, mint egy $2n$ dimenziós folytonos globális optimalizálási feladat. Ennek megoldására több különböző optimalizálási módszer (pl. nemlineáris szimplex módszer, genetikus algoritmus) alkalmazása után egy speciális sztochasztikus algoritmus kidolgozása volt célravezető.

A TAMSASS-PECS (Threshold Accepting Modified Single Agent Stochastic Search for Packing Equal Circles in a Square) algoritmus egy kétfázisú direkt kereső eljárás. Ezt a módszert n egybárág kör egységnyezetben való optimális elhelyezésének megtalálására fejlesztették ki, de kis módosítással más szabályos alakzatokra is alkalmazható. Az algoritmus egy lokális keresőből és egy olyan keretprogramból áll, amely azt próbálja meg biztosítani, hogy az algoritmus ne akadjon el egy lokális optimumban, hanem legyen esélye arra, hogy a globálisat találja meg. A módszerben a Threshold Accepting (TA) technikát – mint keretrendszert – a Single Agent Stochastic Search (SASS) lokális kereső egy alkalmasan módosított változatát kombinálták a kutatók.

Az algoritmus egy pszeudovéletlen lehetséges megoldásból indul ki, valamint adott egy kezdő szórás, és egy küszöbérték. Az algoritmus a kezdő pontelhelyezésen egy iterációs eljárás segítségével próbál javítani. Minden lépésben megpróbál egy jobb helyet találni az aktuálisan vizsgált pontnak az MSASS kereső módszer segítségével. A szórás minden lépés után csökken, egy adott végső érték elérése esetén leállítjuk az algoritmust. A módszer keretét adó Threshold Accepting eljárás elfogad minden olyan új lehetséges megoldást is, amely nem sokkal rosszabb, mint a legjobb addig ismert, tehát nem feltétlenül monoton módon javítva jut el a végső megoldásig, hanem megenged néhány nem túl rossz lépést is annak reményében, hogy onnan majd egy az optimalizálás szempontjából sokkal jobb helyre tud eljutni.

A TAMSASS-PECS algoritmussal az első száz esetre közöltek alsó korlátot az optimális pakolások m_n értékére. Az 1999-ig publikált 59 esetből 20 esetben találták meg pontosan a korábbi számításokkal megegyező értékeket, 34 esetben azoknál rosszabbat. Az $n = 32, 37, 42, 62$ és 72 esetekben minden korábban kiadott eredményen javítottak, valamint 40 esetben addig nem publikált, új körpakolásokat állítottak elő.

5. fejezet

Ismétlődő minták a körpakolásokban

Az optimális és az eddig ismert legjobb körpakolások struktúráinak összehasonlítása alapján kiderült, hogy bizonyos esetekben ismétlődő minták fedezhetők fel. Az ismétlődő minták és a körök darabszáma között gyakran kapcsolat van. Ezen kapcsolat alapján bizonyos körpakolásokat mintaosztályokba sorolhatunk. A fejezetben tárgyalt mintaosztályok csak véges sok n -re adnak optimális pakolást.

A mintaosztályokra és a hozzájuk tartozó mintákra a $\mathbf{PAT}(f(k))$ jelölést használjuk, ahol $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ egy adott függvény, $f(k)$ a körök számát jelöli.

Az fejezetben található ábrák jelölései a következők:

n : a pontok/körök száma,

m : a pontok közötti minimális távolság maximuma,

r : a kongruens körök sugara,

c : az érintkezési helyek száma,

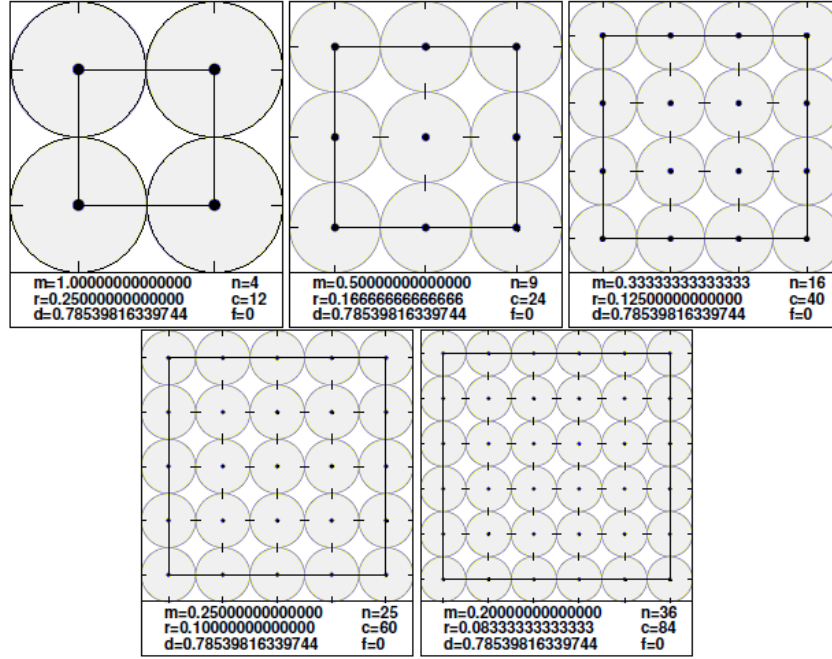
d : a pakolás sűrűsége,

f : a szabad körök száma.

A rögzített körök halvány, a szabad körök sötétszürke színűek.

5.1. A $\text{PAT}(k^2 - l)$ ($l = 0, 1, 2$) mintaosztályok

$\text{PAT}(k^2)$: Talán a legszembetűnőbb mintát az $n = 4, 9, 16, 25$ és 36 négyzetszámokhoz tartozó, a köröket $k \times k$ -s ($n = k^2$) négyzetes struktúrában elhelyező körpakolások adják. Az ezeknek a körpakolásoknak megfelelő pontelhelyezésekben a pontok koordinátái (il_k, jl_k) lesznek, ahol $0 \leq i, j \leq k - 1$ egészek, és $l_k = \frac{1}{k-1}$.



5.1. ábra. A $\text{PAT}(k^2)$ mintájú körpakolások, ahol $k = 2, 3, 4, 5$ és 6 .

6. Állítás. A $\text{PAT}(k^2)$ mintájú pontelhelyezésekben minden $k \geq 2$ esetén

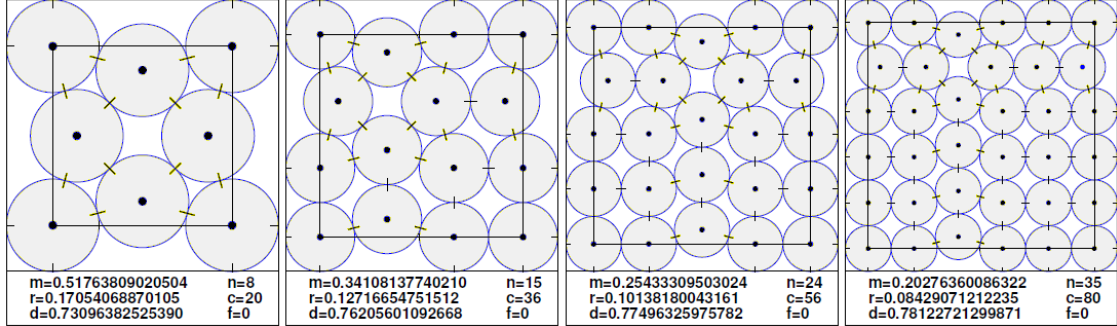
$$m_n = l_k = \frac{1}{k-1}.$$

A $k = 2, 3, 4$ és 5 esetekben bizonyítottan, és $k = 6$ -ra sejtetően az optimális körpakolást ez a minta adja, a $k = 7$ esetre viszont biztosan nem. Ebben az osztályban a körpakolások sűrűsége állandó, mivel

$$d_n = k^2 \left(\frac{1}{2k} \right) \pi = \frac{\pi}{4}.$$

$\text{PAT}(k^2 - 1)$: Helyezzünk el a négyzetben $n = k^2$ darab kört ($n \geq 3$) a $\text{PAT}(k^2)$ mintának megfelelően, majd vegyünk ki egy olyan kört a pakolásból, amely a négyzet egyetlen oldalával sem érintkezik. Az így megmaradt $k^2 - 1$ darab kör már elhelyezhető egy kisebb oldalhosszúságú négyzetben is, ha a kiválasztott kör oszlopában (illetve

sorában) lévő köröket az egységnégyzet $(0, 0) - (0, 1)$ (illetve $(0, 0) - (1, 0)$) oldalaival párhuzamosan beljebb toljuk és az egész körpakolást összenyomjuk úgy, hogy a kivett kört érintő körök középpontjai egy rombuszt alkossanak.



5.2. ábra. A $\text{PAT}(k^2 - 1)$ mintájú körpakolások, ahol $k = 3, 4, 5$ és 6 .

Az ekvivalens pontelhelyezésekben, ha a $(\frac{k-2}{k-1}, \frac{k-2}{k-1})$ koordinátájú ponthoz tartozó kört vettük ki, akkor a pontok koordinátái: $\cup_{i=1}^6 C_i$, ahol $l_k = \frac{1}{k-3+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ és

$$C_1 = \{(il_k, jl_k) | 0 \leq i, j \leq k-3\},$$

$$C_2 = \{(1, il_k) | 0 \leq i \leq k-3\},$$

$$C_3 = \{(il_k, 1) | 0 \leq i \leq k-3\},$$

$$C_4 = \{((i + \sin \frac{\pi}{12})l_k, (k-2 + \cos \frac{\pi}{12})l_k) | 0 \leq i \leq k-3\},$$

$$C_5 = \{((k-2 + \cos \frac{\pi}{12})l_k, (i + \sin \frac{\pi}{12})l_k) | 0 \leq i \leq k-3\},$$

$$C_6 = \{(1, 1), (1 - l_k \sin \frac{\pi}{12}, (k-2 + \cos \frac{\pi}{12})l_k), ((k-2 + \cos \frac{\pi}{12})l_k, 1 - l_k \sin \frac{\pi}{12})\}.$$

7. Állítás. A $\text{PAT}(k^2 - 1)$ mintájú pontelhelyezésekben minden $k \geq 3$ esetén

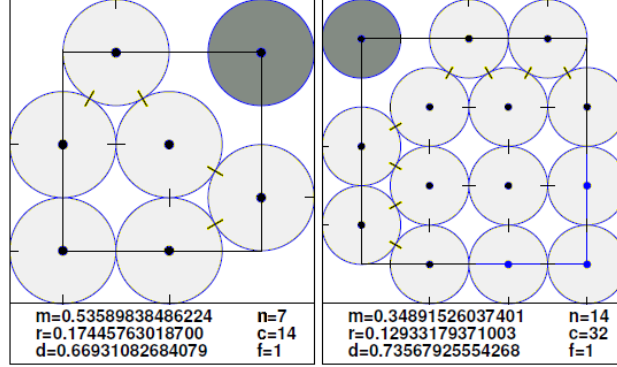
$$m_n = l_k = \frac{1}{k-3+\sqrt{2+\sqrt{3}}}.$$

Igazolható, hogy a $k = 3, 4$ és 5 esetekben az így kapott körpakolások optimálisak lesznek. Ez a minta sejtetően ad egy optimális körpakolást a $k = 6$ ($n = 35$) esetben is, $n = 48$ -ra azonban biztosan nem.

Az $n = 16$ körszámra a szimmetrikus esetek miatt csak egy olyan kört választhatunk, amelyet kivehetünk a négyzetből, az $n = 25$ esetben azonban két olyan kör adódik, amelyek egyenkénti kivétele különböző optimális pakolásokat eredményez. Az $n = 36$ esetben három ilyen körünk van.

$\text{PAT}(k^2 - 2)$: Az előbbi mintaképzés analógiájára a $\text{PAT}(k^2)$ körpakolásból eltávolíthatunk egyszerre 2 kört is. Itt két további alosztályt különböztetünk meg.

a) $\mathbf{PAT}_1(k^2 - 2)$: Tekintsünk a $\mathbf{PAT}(k^2)$ mintának megfelelő körpakolásban egy olyan kört, amely a négyzet valamelyik sarkában van. Vegyük ki azt a két kört a pakolásból, amelyek érintik a kiválasztott kört. A sarokban lévő kör sorában és oszlopában egyaránt $k - 1$, $k - 1$ kör marad, a sarokban lévő kört pedig semmilyen kör nem érinti, így az szabad körre válik.



5.3. ábra. A $\mathbf{PAT}_1(k^2 - 2)$ mintájú körpakolások, ahol $k = 3$ és 4 .

A kiválasztott kör sorában és oszlopában álló $2 \times (k - 1)$ kört a megmaradt $(k - 1) \times (k - 1)$ -es négyzetes körpakolás rendre megfelelő szélein álló köreihez úgy tudjuk hozzátenni, hogy minden két szélén álló körhöz illesztünk egy-egy kört. Az így kapott körpakolást (a szabad körrel együtt) egy korábbinál kisebb oldalhosszúságú négyzetben is elhelyezhetjük. Az ennek a körpakolásnak megfelelő pontelhelyezés koordinátái, ha a $(\frac{k-2}{k-1}, 1)$ és $(1, \frac{k-2}{k-1})$ pontoknak megfelelő köröket vesszük ki: $\cup_{i=1}^4 C_i$, ahol $l_k = \frac{1}{k-2+\frac{\sqrt{3}}{2}}$ és

$$C_1 = \{(il_k, jl_k) | 0 \leq i, j \leq k-3\},$$

$$C_2 = \{(\frac{l_k}{2} + il_k, 1) | 0 \leq i \leq k-3\},$$

$$C_3 = \{(1, \frac{l_k}{2} + il_k) | 0 \leq i \leq k-3\},$$

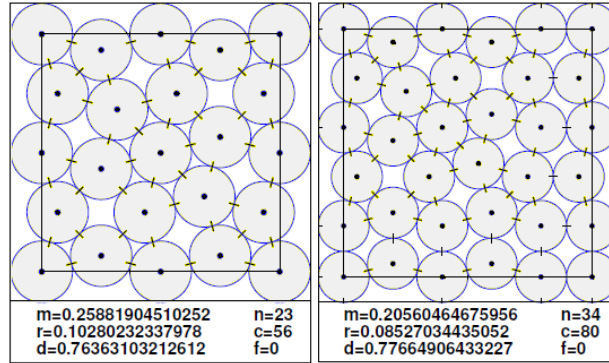
$$C_4 = \{(1, 1)\} \text{ (szabad kör).}$$

8. Állítás. A $\mathbf{PAT}_1(k^2 - 2)$ mintájú pontelhelyezésekben minden $k \geq 3$ esetén

$$m_n = l_k = \frac{1}{k-2+\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

A $k = 3$ és 4 esetekben a $\mathbf{PAT}_1(k^2 - 2)$ minta adja az optimális pakolásokat. A $k = 5$ és 6 értékekre az optimális és a legjobb ismert pakolások struktúrái az előbbihez nagyon hasonló szabály szerint megkaphatók. A különbség csak az, hogy a $\mathbf{PAT}(k^2)$ körpakolásból a két kivett kört nem a pakolás széléről, hanem annak belsőjéből választjuk.

b) $\mathbf{PAT}_2(k^2 - 2)$: Tekintsünk egy, a $\mathbf{PAT}(k^2)$ mintának megfelelő körpakolást, amelyben $k \geq 5$. Vegyük ki a $(\frac{k-2}{k-1}, \frac{k-2}{k-1})$ és $(\frac{k-4}{k-1}, \frac{k-4}{k-1})$ pontoknak megfelelő köröket a pakolásból és a kivett körök sorában és oszlopában álló köröket toljuk beljebb a kivett körök irányába. Ha a körpakolást most a négyzet oldalai mentén összenyomjuk, akkor a körök elférnek egy korábbinál kisebb oldalhosszúságú négyzetben. A két kivett kört egyenként érintő négy kör középpontjai egy-egy négyzetet fognak alkotni.



5.4. ábra. A $\mathbf{PAT}_2(k^2 - 2)$ mintájú körpakolások, ahol $k = 5$ és 6 .

9. Állítás. A $\mathbf{PAT}_2(k^2 - 2)$ mintájú pontelhelyezésekben minden $k \geq 3$ esetén

$$m_n = l_k = \frac{1}{k - 5 + 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}}.$$

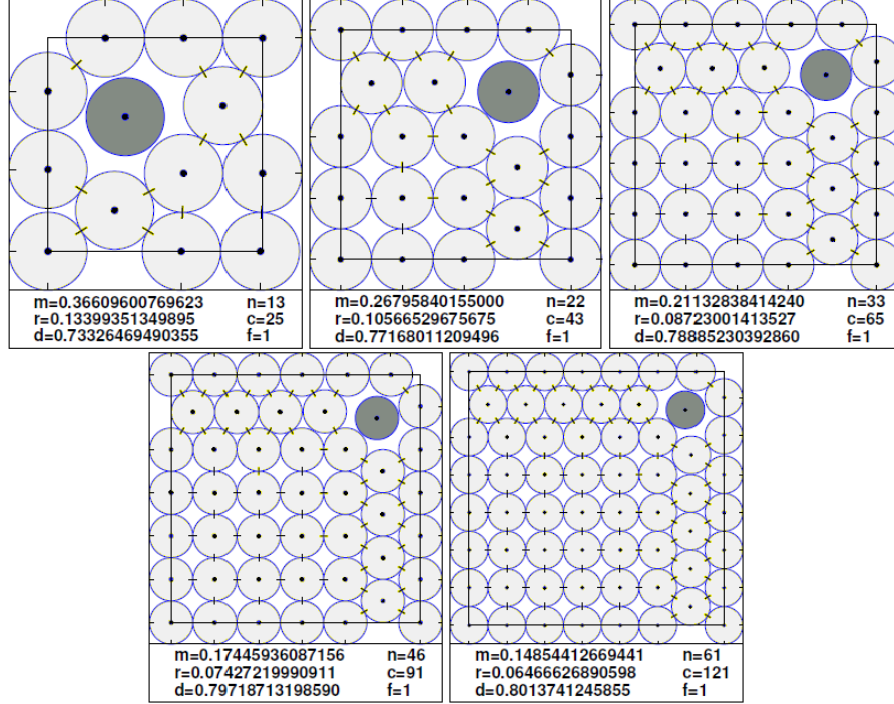
A $k = 5$ esetben ez a $\mathbf{PAT}_2(k^2 - 2)$ minta adja a az optimális körpakolást és $k = 6$ -ra a ma ismert legjobb közelítést. A $k = 7$ esetben, vagyis az $n = 47$ körszámra a TAMSASS-PECS algoritmussal sikerült jobb pakolást találni.

5.2. Az $\mathbf{STR}(k^2 - l)$ ($l = 3, 4, 5$) struktúraosztályok

Az $\mathbf{STR}(f(k))$ jelölést a $\mathbf{PAT}(f(k))$ jelöléshez hasonlóan használjuk, tehát $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ egy adott függvényt és $f(k)$ a körök számát jelenti. Az elnevezés azért változik mintaosztályról struktúraosztályra, mert ezekben az esetekben az optimális és legjobban közelítő pakolások koordinátáit nem adjuk meg, helyette csak egy, azt jól közelítő struktúrát definiálunk.

$\mathbf{STR}(k^2 - 3)$: Ha megnézzük az $n = k^2 - 3$ ($k = 4, 5, 6, 7, 8$) alakú körpakolások optimális és ma ismert legjobb elrendezéseit, azt találjuk, hogy azok strukturális szempontból hasonlítanak egymásra. Ezek a pakolások közel állnak egy olyan esethez, amikor

a $\mathbf{PAT}(k^2)$ mintából kivesszük az $(1, 0)$, $(\frac{k-2}{k-1}, \frac{2}{k-1})$ és $(\frac{k-3}{k-1}, \frac{1}{k-1})$ pontoknak megfelelő köröket, és a pakolást összenyomjuk. Ezzel a korábban már alkalmazott ötlettel kapott pakolások struktúrája ugyan nem lesz azonos, de jól közelíti azt.

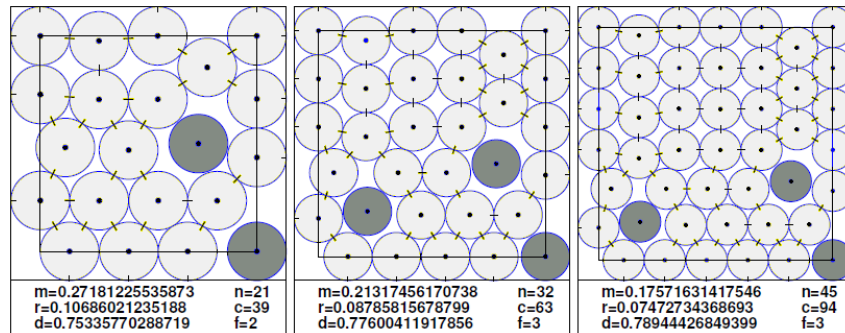


5.5. ábra. Az $\mathbf{STR}(k^2 - 3)$ struktúrájú körpakolások, ahol $k = 4, 5, 6, 7$ és 8 .

10. Állítás. Az $\mathbf{STR}(k^2 - 3)$ struktúrájú pontelhelyezésekben minden $k \geq 4$ esetén

$$m_n = l_k = \frac{1}{k - 3 + \sqrt{3}}.$$

$\mathbf{STR}(k^2 - 4)$: Az $n = k^2 - 4$ ($k = 5, 6, 7$) körszámú optimális és a ma ismert legjobb körpakolások struktúrális hasonlósága szintén szembetűnő.



5.6. ábra. Az $\mathbf{STR}(k^2 - 4)$ struktúrájú körpakolások, ahol $k = 5, 6$ és 7 .

A fenti pakolások egy közelítését úgy kapjuk meg, ha a köröket a $\mathbf{PAT}(k^2)$ mintának megfelelően tesszük le és a hozzátartozó pontelhelyezés $(\frac{k-2}{k-1}, 0)$, $(1, \frac{1}{k-1})$, $(\frac{3}{k-1}, \frac{k-2}{k-1})$ és $(\frac{k-3}{k-1}, \frac{2}{k-1})$ pontjainak megfelelő köreit kivesszük, majd pakolást osszenyomjuk.

11. Állítás. Az $\mathbf{STR}(k^2 - 4)$ struktúrájú pontelhelyezésekben minden $k \geq 5$ esetén

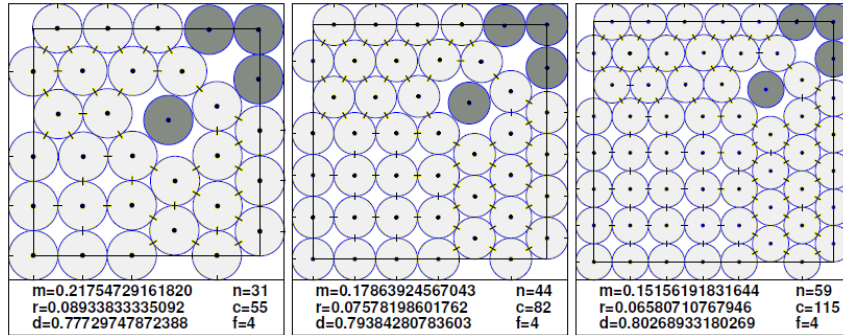
$$m_n = l_k = \frac{1}{k - 3 + \sqrt{3}}.$$

$\mathbf{STR}(k^2 - 5)$: Hasonló struktúrái vannak az $n = k^2 - 5$ alakú pakolásoknak is a $k = 6, 7, 8$ esetekben.

A pakolásokat itt is azzal a struktúrával közelítjük, amit úgy kapunk, hogy a $\mathbf{PAT}(k^2)$ mintának megfelelő pontelhelyezésből a $(\frac{k-3}{k-1}, 1)$, $(\frac{k-2}{k-1}, \frac{k-2}{k-1})$, $(1, \frac{k-3}{k-1})$, $(\frac{k-4}{k-1}, \frac{k-3}{k-1})$ és a $(\frac{k-3}{k-1}, \frac{k-4}{k-1})$ koordinátájú pontokat elhagyjuk, és a pakolást osszenyomjuk. A pakolások négy szabad kört tartalmaznak, és szimmetrikusak a négyzet $(0, 0) - (1, 1)$ átlójára.

12. Állítás. Az $\mathbf{STR}(k^2 - 5)$ struktúrájú pontelhelyezésekben minden $k \geq 6$ esetén

$$m_n = l_k = \frac{1}{k - 4 + \frac{3}{2}\sqrt{3}}.$$



5.7. ábra. Az $\mathbf{STR}(k^2 - 5)$ struktúrájú körpakolások, ahol $k = 6, 7$ és 8 .

Ismétlődő minták azonban nem feltétlenül csak a $\mathbf{PAT}(k^2)$ négyzetes struktúrából származnak. Vannak egyéb rácspakolások is az optimális és a legjobbnak ismert pakolások között.

5.3. A $\text{PAT}(k(k+1))$ mintaosztály

Ezen mintaosztályon belül két további alosztályt különböztetünk meg:

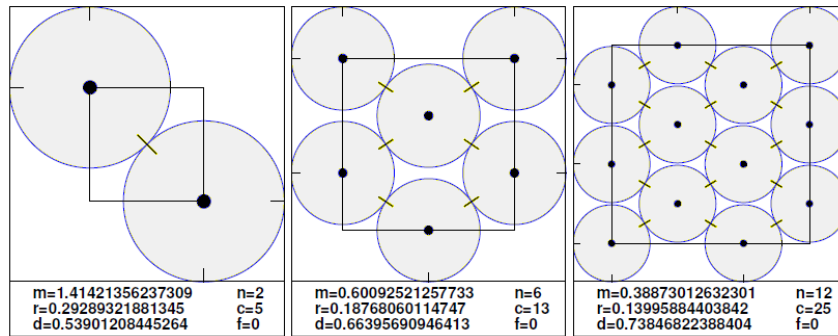
a) $\text{PAT}_1(k(k+1))$: Helyezzük el a pontokat egy téglalaprácsra az alábbiak szerint: Osszuk fel a négyzet egyik oldalát k , egy az előbbire merőleges másik oldalát $2k-1$ egyenlő részre. Az osztópontokon keresztül húzzunk párhuzamosokat az oldalakkal. A kapott téglalaprácsnak tegyük minden második rácspontjába egy pontot úgy, hogy az első pontot a négyzet $(0,0)$ koordinátájú sarkába tesszük. Az így lerakott $k(k+1)$ pont koordinátái az alábbiak lesznek:

$$\left(\frac{i}{2}, \frac{i \bmod 2}{2k-1} + \frac{2j}{2k-1} \right), \text{ ahol } 0 \leq i \leq k \text{ és } 0 \leq j \leq k-1.$$

Könnyű belátni, hogy a pontok közötti minimális m_n távolság csak akkor lesz

$$\sqrt{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(2k-1)^2}},$$

vagyis pontosan a téglalap átlóhossza, ha $1 \leq k \leq 3$. Viszont ezekben az esetekben ez a minta adja az optimális pakolásokat, míg k növekedésével már egy másik mintaosztályba tartoznak az optimális és az ismert legjobb elhelyezések.



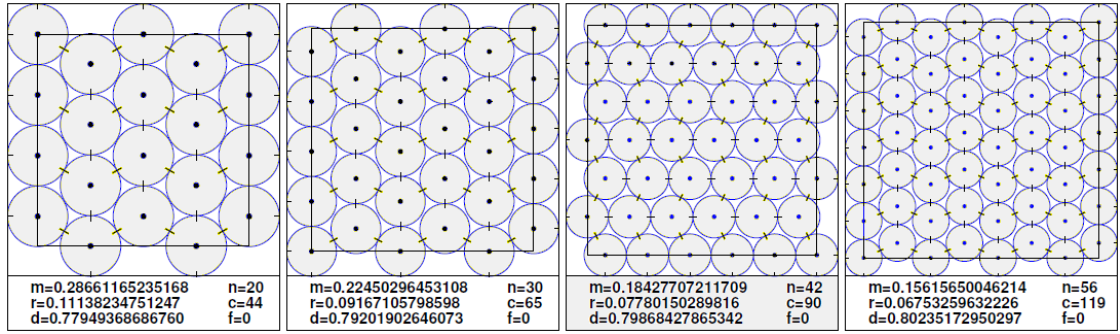
5.8. ábra. A $\text{PAT}_1(k(k+1))$ mintájú körpakolások, ahol $k = 1, 2$ és 3 .

b) $\text{PAT}_2(k(k+1))$: Tekintsük most az alábbi koordinátákkal adott pontelhelyezést:

$$\left(i\sqrt{l_k^2 - (1 - kl_k + l_k)^2}, i \bmod 2 + (-1)^i j l_k \right), \text{ ahol } 0 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq k-1, k \leq 4,$$

$$l_k = \frac{k^2 - k - \sqrt{2k}}{k^3 - 2k^2}.$$

A pontok közötti minimális távolságra itt $m_n = l_n$ adódik. A $k = 4$ és 5 esetekben az optimális, a $k = 6$ és 7 esetekben a ma ismert legjobb körpakolást ez a minta adja.



5.9. ábra. A $\text{PAT}_2(k(k+1))$ mintájú körpakolások, ahol $k = 4, 5, 6$ és 7 .

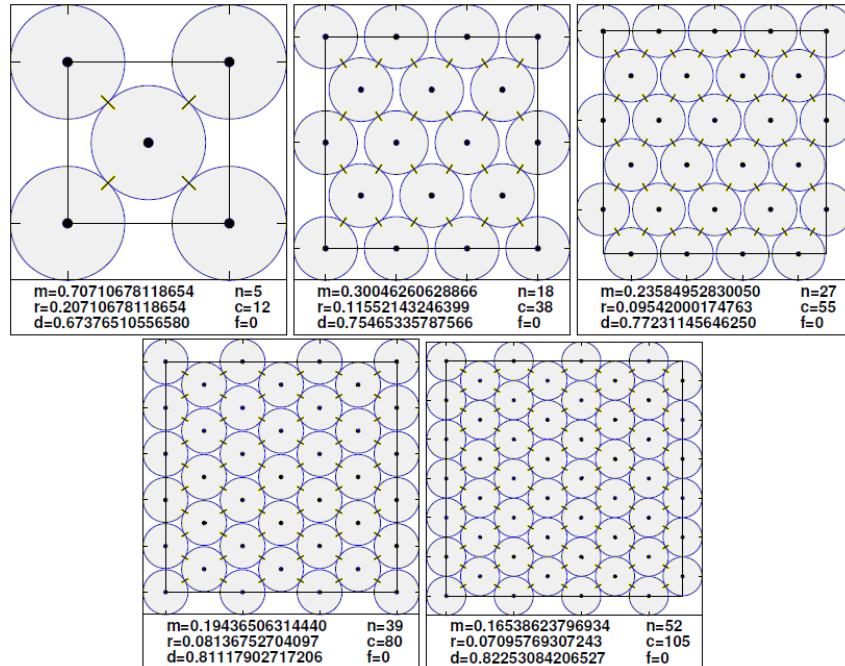
5.4. A $\text{PAT}(k^2 + \lfloor k/2 \rfloor)$ mintaosztály

A $\text{PAT}_1(k(k+1))$ mintaképzéshez hasonlóan tekintsük most azt a pontelhelyezést, amikor nem k és $2k-1$ részre osztjuk a négyzet oldalait, hanem k és $2k-2$ egyenlő részre. Ekkor a pontelhelyezést az alábbi koordinátákkal adhatjuk meg:

$$\left(\frac{i}{k}, \frac{j}{2k-2} \right), \text{ ahol } 0 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq 2k-2 \text{ és } k \leq 7.$$

Ekkor

$$m_n = \sqrt{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(2k-2)^2}}.$$



5.10. ábra. A $\text{PAT}(k^2 + \lfloor k/2 \rfloor)$ mintájú körpakolások, ahol $k = 2, 4, 5, 6$ és 7 .

A pontok közötti távolságok minimuma azonban csak akkor lesz egyenlő a téglalapok átlóival, ha $k^2 - 8k + 4 \leq 0$. Amint az könnyen ellenőrizhető, ekkor $k \leq 7$, ahol k pozitív egész szám. A $k = 2, 4$ és 5 esetekben az optimális, a $k = 6$ és 7 esetekben a ma ismert legjobb pakolást adja.

5.5. Összegzés

A bemutatott mintaosztályok csak véges sok esetben adtak optimális pakolást. A körök számának növekedésével az optimális körpakolások egyre nagyobb hexagonális részstruktúrát tartalmaznak, tehát a minták csak egy bizonyos körszámig adhatják a legjobb elhelyezéseket, utána azokat más váltja fel. Egy ilyen struktúraváltást figyelhetünk meg például akkor, ha tekintjük az $n = k(k + 1)$ körszámú pakolásokat. A $k = 1, 2$ és 3 esetekben a $\mathbf{PAT}_1(k(k + 1))$ minta adja az optimális pakolásokat, $k = 4, 5, 6$ és 7 esetén azonban már a $\mathbf{PAT}_1(k(k + 1))$ mintából kerülnek ki a legjobb elhelyezések. Vannak feltetelezések, melyek szerint létezik olyan osztály, amely végtelen sok esetben ad optimális körelhelyezést, de ezt a mai napig még nem tudták igazolni.

A mintaosztályok segítségével bizonyos esetekre javítani lehet az 5. tételben m_n -re kapott alsó korlátot. Az alábbi táblázat tartalmazza $n = 46$ -ig az $\overline{m}_n$ értéket, valamint a minta- és struktúraosztályok segítségével javított m'_n alsó korlátot. A struktúraosztályok esetében kapott értékek nem optimálisak, azokon már tudtak javítani.

A megismert mintaosztályok számos esetben nagy segítséget nyújtanak a matematikusoknak, mert a kapott m_n alsó korlátok determinisztikus algoritmuskok jó kiindulópontjai lehetnek. Az optimalizáló algoritmusok és a számítógépes hardver fejlődésével várhatóan egyre több optimális pakolást fogunk megismerni, így nagyon valószínű, hogy a jövőben számos további mintaosztályt fognak feltárni a kutatók.

5.1. táblázat. Az elméleti úton és mintaosztályok segítségével kapott alsó korlátok.

n	$\overline{m}_n$	Minta	m'_n
2	0,75983569	$\mathbf{PAT}_1(k(k+1))$	1,41421356
4	0,53728497	$\mathbf{PAT}(k^2)$	1,00000000
5	0,48056228	$\mathbf{PAT}(k^2 + \lfloor k/2 \rfloor)$	0,70710678
6	0,43869134	$\mathbf{PAT}_1(k(k+1))$	0,60092521
7	0,40614926	$\mathbf{PAT}_1(k^2 - 2)$	0,53589838
8	0,37991784	$\mathbf{PAT}(k^2 - 1)$	0,51763809
9	0,35818998	$\mathbf{PAT}(k^2)$	0,50000000
12	0,31020162	$\mathbf{PAT}_1(k(k+1))$	0,38873013
13	0,29803208	$\mathbf{STR}(k^2 - 3)$	0,36602540
14	0,28719089	$\mathbf{PAT}_1(k^2 - 2)$	0,34891526
15	0,27745276	$\mathbf{PAT}(k^2 - 1)$	0,34108138
16	0,26864248	$\mathbf{PAT}(k^2)$	0,33333333
18	0,25327856	$\mathbf{PAT}(k^2 + \lfloor k/2 \rfloor)$	0,30046261
20	0,24028114	$\mathbf{PAT}_2(k(k+1))$	0,28661165
21	0,23449038	$\mathbf{STR}(k^2 - 4)$	0,27540393
22	0,22909908	$\mathbf{STR}(k^2 - 3)$	0,26794919
23	0,22406332	$\mathbf{PAT}_2(k^2 - 2)$	0,25881905
24	0,21934567	$\mathbf{PAT}(k^2 - 1)$	0,25433310
25	0,21491399	$\mathbf{PAT}(k^2)$	0,25000000
27	0,20680108	$\mathbf{PAT}(k^2 + \lfloor k/2 \rfloor)$	0,23584953
30	0,19618873	$\mathbf{PAT}_2(k(k+1))$	0,22450296
31	0,19299846	$\mathbf{STR}(k^2 - 5)$	0,21748226
32	0,18995892	$\mathbf{STR}(k^2 - 4)$	0,21132487
33	0,18705861	$\mathbf{STR}(k^2 - 3)$	0,21132487
34	0,18428722	$\mathbf{PAT}_2(k^2 - 2)$	0,20560465
35	0,18163547	$\mathbf{PAT}(k^2 - 1)$	0,20276360
36	0,17909499	$\mathbf{PAT}(k^2)$	0,20000000
39	0,17206890	$\mathbf{PAT}(k^2 + \lfloor k/2 \rfloor)$	0,19436506
42	0,16580974	$\mathbf{PAT}_2(k(k+1))$	0,18427707
44	0,16199751	$\mathbf{STR}(k^2 - 5)$	0,17863279
45	0,16018743	$\mathbf{STR}(k^2 - 4)$	0,17445763
46	0,15843669	$\mathbf{STR}(k^2 - 3)$	0,17445763

Irodalomjegyzék

- [1] B. Addis, M. Locatelli, F. Schoen: Disk Packing in a Square: A New Global Optimization Approach *Optimization Online*, 2005.
- [2] L. G. Casado, I. García, P. G. Szabó, T. Csentes: Packing Equal Circles in a Square I. - Problem Setting and Bounds for Optimal Solutions, *Optimization Theory: Recent Developments from Mátraháza*, Kluwer, Dordrecht, 191–206, 2001.
- [3] L. G. Casado, I. García, P. G. Szabó, T. Csentes: Packing Equal Circles in a Square II. - New results for up to 100 circles using the TAMSASS-PECS stochastic algorithm. *Optimization Theory: Recent Developments from Mátraháza*, Kluwer, Dordrecht, 207–224, 2001.
- [4] M. Hujter: Some Numerical Problems in Discrete Geometry, *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 38, 175–178, 1999.
- [5] P. G. Szabó: Egybevágó körök pakolásai négyzetben - Korlátok, ismétlődő minták és minimálpolinomok, *Doktori értekezés, Szegedi Tudományegyetem*, Szeged, 2005.
- [6] P. G. Szabó: Optimal substructures in optimal and approximate circle packings, *Beiträge zur Algebra und Geometrie, Contributions to Algebra and Geometry*, Vol. 46, 103–118, 2005.
- [7] P. G. Szabó, M. Cs. Markót, T. Csentes, E. Specht, L.G. Casado, I. García: New Approaches to Circle Packing in a Square (With program codes), *Springer*, 2007.
- [8] P. G. Szabó, E. Specht: Packing Up to 200 Equal Circles in a Square, *Models and Algorithms for Global Optimization: Essays Dedicated to Antanas Zilinskas on the Occasion of His 60th Birthday (Springer Optimization and Its Applications, Vol. 4)*. Ed. by A. Törn, J. Zilinskas. New York. 2007. Springer. pp. 141–156.

- [9] P. G. Szabó, M. Cs. Markót, T. Csendes: Global Optimization in Geometry — Circles Packing into the Square, *Essays and Surveys in Global Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 233–266.
- [10] P. G. Szabó: Szangaku, a japán matematika kincsei, *Szaku* 9:8–9.
- [11] Packing website of E. Specht: <http://www.packomania.com>