SZAKDOLGOZAT

Matematika B.Sc.

Budan és Fourier tétele a valós polinomok gyökeiről

Szirmai Csilla

Témavezető: Hujter Mihály

egyetemi docens

BME Matematika Intézet,

Differenciálegyenletek Tanszék

BME

2018

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A matematika összes területén találkozhatunk polinomokkal, emellett szinte minden más tudomány területén is előfordulnak. Ezek vizsgálata, gyökeinek megtalálása, a polinomiális egyenletek megoldása tehát különös figyelmet érdemel.

Az első- és másodfokú egyenletek megoldása évezredek óta ismert. A harmad-, illetve negyedfokú esetekre a 16. században találtak megoldóképletet, azonban ezen képletek alkalmazása már jóval mélyebb ismereteket igényel. Harmadfokú egyenletet a Scipione del Ferro és N. Tartaglia által bizonyított Cardano-képlettel tudunk megoldani, a negyedfokúra pedig G. Cardano tanítványa, L. Ferrari mutatott megoldást. Ezek után merült fel a kérdés, vajon ötöd- vagy magasabb fokú egyenletek megoldásához is találhatunk megoldóképletet? A sok próbálkozás után végül a 19. században először N. H. Abelnek, majd É. Galois-nak sikerült megmutatnia, hogy ekkor már nem létezik ilyen, csak speciális esetekben. Emiatt vált fontossá, hogy az egyenletek megoldásainak, a polinom gyökeinek elhelyezkedéséről tudjunk nyilatkozni, még akkor is, ha a konkrét értékeiket nem ismerjük.

Dolgozatomban a valós együtthatós polinomokat vizsgálom és azok valós gyökeit. Az algebra alaptétele alapján ismert, hogy egy n-edfokú polinomnak pontosan n darab komplex gyöke létezik, azonban a valós gyökök számát nem lehet ilyen egyszerűen, pontosan megadni. Ma már több módszer is létezik, amelyekkel erre a számra becsléseket tudunk adni, különböző intervallumokban vizsgálva a gyökök számát. A legelső és legfontosabb eredmények közé tartozik Budan és Fourier tétele, melyeken a ma nagyon gyakran használt gyors és hatékony gyökkereső algoritmusok alapulnak.

A szakdolgozatom célja, hogy bemutassam e jelentős tételeket és az ehhez kapcsolódó fontosabb eredményeket. Példákon keresztül megmutatom, hogyan alkalmazhatjuk ezeket, hogyan tudunk a segítségükkel becsléseket adni a polinomok gyökeire és milyen egyéb fontos információkat adnak nekünk a kifejezésekről. Vizsgálom a tétel néhány más fontos alkalmazási területét, általánosítását is, illetve, hogy milyen lehetőségek kínálkoznak még a téma további feldolgozásával kapcsolatban.

2. Történeti áttekintés

Tekintsük át röviden a témához kapcsolódó eredményeket. A valós együtthatós polinomok valós gyökeiről az első és egyben leghíresebb eredmény René Descartes nevéhez fűződik. Ez az úgynevezett Descartes-féle előjelszabály 1637-ben jelent meg *La Géométrie* [1] című művében. Tételében felső korlátot adott a valós együtthatós polinomok pozitív gyökei számára a polinom előjelváltásainak száma alapján. Ez az a szám, ahányszor átlépünk az origó felett, ha az együtthatók által alkotott $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ sorozat elemeit a számegyenesen képzeljük el és sorban lépkedünk köztük a_0-tól a_n-ig. Descartes a szabály bizonyítására még nem jött rá, először a magyar Segner János Andrásnak sikerült belátnia 1727-ben, azonban az ő bizonyítása csak akkor tekinthető teljesen korrektnek, ha az n-edfokú polinomnak pontosan n darab valós gyöke van multiplicitással számolva és a 0 nem gyök. Ebben az esetben az előjelváltások száma megegyezik a pozitív zérushelyek számával. Ma a tételnek egy erősebb változatát használják, amelynek megfogalmazása C. F. Gauss nevéhez fűződik. E szerint az előjelváltások és a pozitív gyökök számának különbsége csak páros szám lehet. A következőkben én is ezt a változatot fogom használni. Gauss ezen eredménye mellett még fontos megemlítenünk az algebra alaptételét, amire bizonyítást adott. A tétel a komplex polinomok egyik legfontosabb tulajdonságát mondja ki, így hangzik: egy legalább elsőfokú komplex együtthatós polinomnak létezik komplex gyöke. Ez alapján egy másik fontos állítást is megkapunk, ami szerint minden legalább elsőfokú valós együtthatós polinom felírható első- és másodfokú valós polinomok szorzataként úgy, hogy a másodfokú polinomok egyikének sincs gyöke a valós számok halmazában.

A 19. század elején nagy áttörés következett be, ekkor dolgozta ki F. D. Budan és J. B. J. Fourier a Descartes-féle szabály általánosítását. Egy adott intervallumon belül adtak felső korlátot a valós együtthatós polinom valós gyökei számára, szintén előjelváltások száma alapján. Először Budan tétele jelent meg 1807-ben, *Nouvelle Méthode Pour La Résolution Des Équations Numériques* [2] című munkájában, amelyben csak a polinom együtthatóival dolgozott. 1820-ban Fourier tétele is megjelent a *Bulletin Des Sciences Par La Societe Philomathique De Paris* [3] nevezetű folyóiratban, melyben a polinom deriváltjait is felhasználta munkájához, a két tétel így formailag különbözik egymástól, ám ekvivalens.

A következő jelentős előrehaladás a témában 1829-ben volt, amikor J. C. F. Sturm jelentette meg eredményét (lásd [4]). Ő már a valós zérushelyek pontos számát határozta meg egy adott intervallumon belül a Sturm-sorozatok segítségével. Ezzel hatékony algoritmust talált a polinom valós gyökei szétválasztására, így módszere gyorsan és széles körben elterjedt. Tételével együtt Fourier-é is felkapottá vált, mivel Sturm az ő munkáját fejlesztette tovább. A témával kapcsolatos írásokban is így főleg a Fourier által megfogalmazott állítással találkozunk, legtöbbször Budan–Fourier néven, a Budan-tétel eredeti formájában ritkán fordul elő.

Azonban Budan eredménye önmagában is lényeges, mert A. J. H. Vincent nagyon jelentős tétele (1836) az ő kutatásán alapszik. Ez a racionális együtthatós polinomok valós gyökei szétválasztásának módszerét írja le. Sturm eredménye miatt Vincent tétele is háttérbe szorult, szinte feledésbe is merült. A 19. században J. A. Serret [5] francia matematikus, majd a 20. században J. V. Uspensky [6] orosz matematikus írásában maradt fenn. Később a valós gyökök szétválasztásának leggyorsabb algoritmusai ennek alapján jöttek létre, így Sturm tétele mellett Vincent-é is előtérbe került.

3. Alapfogalmak

Ebben a fejezetben bevezetem a témához kapcsolódó fogalmakat és a későbbiekben használt jelöléseket. Ismertetem a valós polinomok néhány alapvető tulajdonságát is, amik a tételek és bizonyítások megértéséhez szükségesek lesznek.

3.1. Definíció. *Valós együtthatós egyváltozós polinomnak nevezzük az $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ formális kifejezést, ahol n nemnegatív egész szám, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ és x egy szimbólum (változó). Ha $a_n \neq 0$, akkor n-et az f polinom fokának hívjuk és $\deg f$-el jelöljük, a_n a polinom főegyütthatója. Az $f(x) = a_0$ polinomot konstans polinomnak nevezzük.*

3.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy $\alpha \in \mathbb{R}$ az $f(x)$ polinom gyöke, ha $f(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0$ teljesül.*

3.3. Definíció. *$\alpha \in \mathbb{R}$ az $f(x)$ polinom k-szoros gyöke, ha $f(x) = (x-\alpha)^k g(x)$ valamely $g(x)$ polinomra, de $g(\alpha) \neq 0$. A k számot az α gyök multiplicitásának nevezzük.*

Bézout tétele alapján egy $\alpha \in \mathbb{R}$ szám akkor és csak akkor gyöke az $f(x)$ polinomnak, ha $f(x) = (x-\alpha)g(x)$ alakú valamely $g(x)$ polinomra. Az $(x-\alpha)$ kifejezést $f(x)$ α-hoz tartozó gyöktényezőjének nevezzük. Ekkor, ha $f(x)$ n-edfokú volt, $g(x)$ $(n-1)$-edfokú, illetve $g(x)$ gyökei számához hozzáadva egyet megkapjuk $f(x)$ gyökeinek számát. A tételből azt is megkapjuk, hogy a 0 szám pontosan akkor lesz gyök, ha x-et ki tudjuk emelni a kifejezésből. Tehát könnyen megállapítható, hogy gyök lesz-e, illetve az, hogy hányszoros, emiatt a későbbiekben csak a negatív és pozitív valós gyökök vizsgálatával foglalkozunk. Ismert, hogy egy valós együtthatós polinomnak legfeljebb annyi valós gyöke létezhet, mint amennyi a polinom foka, páratlan fokszám esetén legalább egy valós gyök létezik, mivel a komplex gyökök konjugált párokban fordulnak elő.

Az általam bemutatott tételek azt vizsgálják meg, hogy a polinom együtthatói hányszor váltanak pozitívból negatívba, illetve negatívból pozitívba, majd ez alapján adnak becslést a polinom gyökeinek számára. Ezen előjelváltások száma könnyen és gyorsan megadható leolvasva a kifejezésről, ennek köszönhető, hogy a módszerek széles körben elterjedtek.

A következő definícióban nézzük meg, mit is értünk pontosan előjelváltás alatt.

3.4. Definíció. *Legyen n nemnegatív egész szám és $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ valós számok egy tetszőleges sorozata. A sorozat előjelváltásán egy olyan (j, k) indexpárt értünk, melyre $j < k$, $j + 1 = k$ esetén $a_j a_k < 0$, $j + 1 < k$ esetén pedig $a_j a_k < 0$ és minden $j < i < k$-ra $a_i = 0$. Egy $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ valós együtthatós polinom előjelváltásának nevezzük az együtthatók által alkotott $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ valós számsorozat előjelváltását.*

Az $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ polinom előjelváltásainak számát $V(a_0, a_1, \ldots, a_n)$-nel fogjuk jelölni.

Egy $f(x)$ polinom gyökei és deriváltja, $f'(x)$ gyökei között találhatunk összefüggéseket. $f(x)$ egyszeres gyökei $f'(x)$-nek nem gyökei, többszörös gyökei pedig eggyel kevesebb multiplicitású gyökei lesznek a deriváltnak. Ezt egyszerűen beláthatjuk.

Legyen $f(x) = (x - \alpha)^k g(x)$, ahol $0 < k$ egész és $g(x)$ nem osztható $(x - \alpha)$-val, azaz $g(\alpha) \neq 0$. Ekkor a derivált a következő alakú:

$$\begin{aligned} f'(x) &= k(x - \alpha)^{k-1} g(x) + (x - \alpha)^k g'(x) \\ &= (x - \alpha)^{k-1} [k g(x) + (x - \alpha) g'(x)]. \end{aligned}$$

A $kg(x) + (x - \alpha) g'(x)$ kifejezés nem osztható $(x - \alpha)$-val, mivel

$$kg(\alpha) + (\alpha - \alpha) g'(\alpha) = kg(\alpha) \neq 0.$$

Tehát $f'(x)$ $k = 1$ esetén nem lesz osztható $(x - \alpha)$-val, $1 < k$ esetén pedig $(x - \alpha)^{k-1}$-nel osztható lesz, de $(x - \alpha)^k$-nal nem.

A másik fontos összefüggés a Rolle-féle középértéktétel következménye.

3.1. Tétel (Rolle-féle középértéktétel)**.** *Ha az f függvény az $[a, b]$ intervallumban folytonos, az intervallum belső pontjaiban differenciálható és $f(a) = f(b)$, akkor van olyan $a < c < b$ szám, hogy $f'(c) = 0$ teljesül.*

Számunkra az $f(a) = f(b) = 0$ eset lesz fontos. A tétel alapján azt kapjuk meg, hogy ha a és b két valós gyöke egy polinomnak, akkor a deriváltjának létezik egy gyöke az (a, b) nyílt intervallumban.

4. Descartes-féle előjelszabály

4.1. Tétel és bizonyítása

4.1. Tétel (Descartes-féle előjelszabály). *Legyen $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ egy valós együtthatós n-edfokú polinom, ahol n pozitív egész szám és p a pozitív gyökeinek száma, multiplicitással számolva. Ekkor létezik m nemnegatív egész, hogy*

$$p = V(a_0, a_1, \ldots, a_n) - 2m.$$

Először két állítást vizsgálunk meg, amelyekből megkapjuk a tétel bizonyítását. Tekintsük a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}
b_0 &= a_0 \qquad (1)\\
b_1 &= a_0 + a_1\\
b_2 &= a_0 + a_1 + a_2\\
&\vdots\\
b_{n-1} &= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}\\
b_n &= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n.
\end{aligned}$$

Itt a lineáris egyenletrendszerek elmélete alapján az a_i és b_i valós számok meghatározzák egymást, az a_i-k ismeretében megkapjuk b_i-ket, $i = 0, 1, \ldots, n$ és fordítva. $a_n \neq 0$ esetén tekintsük az $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ polinomot és ennek együtthatói legyenek az egyenletrendszerben szereplő a_i-k. Ha f-nek ξ egy gyöke, azaz $f(x) = (\xi - x)g(x)$ egy $(n-1)$-edfokú $g(x)$ polinomra, az egyenletrendszer megoldásával kapott b_i-k g-nek a b_i együtthatói lesznek, $i = 0, 1, \ldots, (n-1)$.

4.1. Állítás. *Ha az (1) egyenletrendszer fennáll valamely $a_n \neq 0$ és $b_n = 0$ esetén, akkor $V(a_0, a_1, \ldots, a_n) - V(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ pozitív páratlan szám.*

Bizonyítás. Megvizsgáljuk külön az $n = 1$ és $n = 2$ eseteket, majd $n \geq 3$-ra látjuk be az állítást. $n = 1$ esetén az egyenletrendszerünk a következőképpen néz ki:

$$\begin{aligned}
b_0 &= a_0\\
b_1 &= a_0 + a_1.
\end{aligned}$$

Ekkor a feltételek alapján az $a_0 = b_0 = -a_1 \neq 0$ és $b_1 = 0$ egyenleteket kapjuk, ezekből $V(a_0, a_1) - V(b_0, b_1) = 1 - 0 = 1$, azaz teljesül az állításunk.

$n = 2$ esetben az alábbi egyenletrendszer adódik:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 \\ b_1 &= a_0 + a_1 \\ b_2 &= a_0 + a_1 + a_2. \end{aligned}$$

Az $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1 - b_0$, $a_2 = -b_1 \neq 0$, és $b_2 = 0$ egyenletek alapján megvizsgáljuk a két lehetséges eredményt. Ha $b_0 b_1 < 0$, akkor $V(b_0, b_1, b_2) = 1$ és $V(a_0, a_1, a_2) = 2$, így $V(a_0, a_1, a_2) - V(b_0, b_1, b_2) = 2 - 1 = 1$. Ha $b_0 b_1 \geq 0$, akkor pedig $V(b_0, b_1, b_2) = 0$ és $V(a_0, a_1, a_2) = 1$, tehát $V(a_0, a_1, a_2) - V(b_0, b_1, b_2) = 1 - 0 = 1$. Ezzel $n = 2$-re is beláttuk az állítást.

Az $n \geq 3$ esetet indirekt bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy valamely $a_n \neq 0$ és $b_n = 0$ esetén $V(a_0, a_1, \ldots, a_n) - V(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ nem pozitív páratlan szám lesz. Legyen n a lehető legkisebb, amire ez teljesül. Ekkor látjuk, hogy $a_i = 0$ nem teljesülhet semmilyen $i = 0, 1, \ldots, n$-re, mivel ekkor az a_i-ket, valamint b_i sorát elhagyhatnánk az egyenletrendszerből, így egy kisebb n-re kapnánk meg az ellenpéldát.

Vizsgáljuk most az (1) egyenletrendszert egy kicsit másképpen, hagyjuk el az első sorát:

$$\begin{aligned} b_1 &= (a_0 + a_1) \\ b_2 &= (a_0 + a_1) + a_2 \\ &\vdots \\ b_{n-1} &= (a_0 + a_1) + a_2 + \cdots + a_{n-1} \\ b_n &= (a_0 + a_1) + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n. \end{aligned}$$

Ekkor $V(a_0 + a_1, a_2, \ldots, a_n) - V(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ pozitív páratlan szám lesz, különben kisebb n-re kapnánk ellenpéldát ismét. Tekintsük a következő két különbséget:

$$\begin{aligned} \alpha &= V(a_0, a_1, \ldots, a_n) - V(a_0 + a_1, a_2, \ldots, a_n), \\ \beta &= V(b_0, b_1, \ldots, b_n) - V(b_1, b_2, \ldots, b_n). \end{aligned}$$

$\alpha \in \{0,1,2\}$ és $\beta \in \{0,1\}$, azt mutatjuk meg, hogy $\alpha - \beta = 0$ vagy $\alpha - \beta = 2$ egyike teljesül. Ehhez feltehetjük az általánosság korlátozása nélkül, hogy $a_0 = 1$ az ellenpéldánkban, ebből pedig megkapjuk, hogy $b_0 = a_0 = 1$ és $b_1 = a_0 + a_1 = 1 + a_1$.

Először vizsgáljuk a $\beta = 0$ esetet. Azt kapjuk, hogy $V(b_0, b_1, \ldots, b_n) = V(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, azaz $b_1 \geq 0$, így $a_0 + a_1 \geq 0$. A lehetséges a_1, a_2 értékek alapján $\alpha \neq 1$ lesz, tehát $\alpha - \beta$ vagy 0 vagy 2 lehet.

Most tegyük fel, hogy $\beta = 1$. A $V(b_0, b_1, \ldots, b_n) - V(b_1, b_2, \ldots, b_n) = 1$ egyenlőséget kapjuk, amiből $b_1 < 0$ következik. A b_1 helyére behelyettesítve $(a_0 + a_1)$-et megvizsgálhatjuk α értékét ismét, erre minden esetben 1-et kapunk, $\alpha - \beta$ pedig 0 lesz.

Ezzel mindkét esetben ellentmondáshoz jutottunk, mivel az indirekt feltevés alapján $\alpha - \beta$ nem lehet nemnegatív páros szám, tehát az állítás minden $n \geq 3$ -ra is teljesül.

$\square$

4.2. Állítás. *Ha* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (\xi - x)g(x)$ *valamely* ξ *pozitív számra és* $g(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$ *polinomra, akkor* $V(a_0, a_1, \ldots, a_n) - V(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$ *pozitív páratlan szám.*

Bizonyítás. A bizonyításban azt használjuk ki, hogy az általánosság korlátozása nélkül feltehető, hogy $\xi = 1$. Először megmutatjuk, ez miért is igaz.

Ha $f(x)$ helyett az $f(\xi x)$ kifejezést tekintjük, akkor $V(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ és $V(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$ értékei változatlanok maradnak. Ezt az $f(\xi x)$ alábbi felírásából látjuk:

$$f(\xi x) = (\xi - \xi x)g(\xi x) = \xi(g(\xi x))(1 - x).$$

Tehát feltehető, hogy $\xi = 1$, azaz $f(x) = (1 - x)g(x)$ alakú. Ekkor $b_n = 0$ választással felírható az (1) egyenletrendszer, illetve fennáll a $V(b_0, b_1, \ldots, b_n) = V(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$ egyenlőség is, így az (4.1) állítás alapján kész vagyunk a bizonyítással.

$\square$

A 4.2. állításból teljes indukcióval következik a Descartes-féle előjelszabály.

Már Descartes is észrevehette, hogy módszerével nem csak a pozitív gyökök számára kaphat felső korlátot, hanem a negatívakra is. Egy $f(x)$ polinom negatív gyökeinek száma megegyezik az $f(-x)$ kifejezés előjelváltásainak számával, vagy annál egy páros számmal kevesebb.

4.2. Példák, alkalmazások

Néhány példán keresztül nézzük meg, hogyan és mire tudjuk használni a tételt.

4.1. Példa. *Vizsgáljuk a következő polinom gyökeit a Descartes-féle előjelszabály segítségével!*

$$f(x) = x^5 + 4x^4 - 2x^3 - 14x^2 - 3x - 18$$

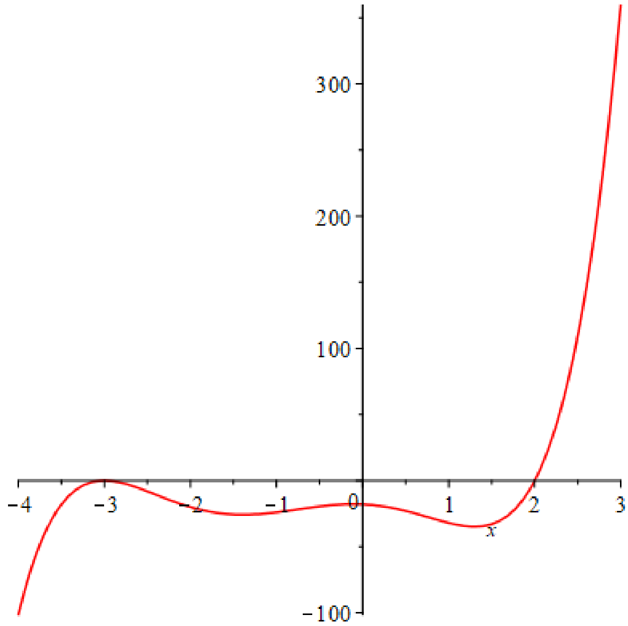
Leolvasható, hogy 1 darab előjelváltása van a kifejezésnek. Mivel a szabály alapján a pozitív gyökök száma egy nemnegatív páros számmal lesz ennél kevesebb, így pontosan 1 darab pozitív gyöke létezik. Most vizsgáljuk meg $f(-x)$-et, hogy megállapíthassuk a negatív gyökök számát:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^5 + 4(-x)^4 - 2(-x)^3 - 14(-x)^2 - 3(-x) - 18 \\ &= -x^5 + 4x^4 + 2x^3 - 14x^2 + 3x - 18. \end{aligned}$$

Itt 4 darab előjelváltást találunk, így a negatív gyökök száma legfeljebb ennyi lehet. Azt is megkapjuk a tételből, hogy ez a szám csak 4, 2 vagy 0 lehet, ez abból is következik, hogy a komplex gyökök mindig konjugált párokban jelennek meg. Mindezek alapján tehát az alábbi három eset lehetséges:

Pozitív gyökök száma	Negatív gyökök száma	Nem valós gyökök száma
1	4	0
1	2	2
1	0	4

Pontosabb adatokat a függvény ábrázolásával kapunk. Az 1. ábrán 4 darab lokális szélsőértékét látjuk a polinomnak. Mivel $f(x)$ ötödfokú, így deriváltja egy negyedfokú kifejezés, ennek a 4 darab gyökét adják meg ezeknek a szélsőértékeknek az x koordinátái. A korábban már említett Rolle-féle középértéktétel következményeként tehát megkapjuk, hogy csak az ábrán látható 2 darab valós gyök létezik. A negatív gyök 2-multiplicitású, lokális szélsőértéke van ott a függvénynek, viszont nem inflexiós pont. Számításaink helyesek voltak, a kapott esetek közül a második teljesül, a nem valós gyökök egymás konjugáltjai lesznek.



1. ábra

A Descartes-féle előjelszabályt a racionális gyökök keresése során is sokszor használják. Egy egész együtthatós polinom racionális gyökeinek megtalálására leggyakrabban az M. Rolle nevéhez köthető racionális gyöktesztet alkalmazzák.

4.2. Tétel (Racionális gyökteszt)**.** *Legyen* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *egy egész együtthatós polinom és tegyük fel, hogy egy* $\frac{p}{q}$ *tovább már nem egyszerűsíthető racionális szám gyöke* $f(x)$*-nek. Ekkor* p *osztója* a_0*-nak és* q *osztója* a_n*-nek.*

A tételt akár racionális együtthatós polinomok gyökeinek megtalálására is használhatjuk, felszorozva a kifejezést az együtthatók legkisebb közös többszörösével.

A gyökteszt segítségével gyorsan meg tudjuk adni a lehetséges p és q értékeket, azonban azt már nehéz megállapítani, mely racionális számok lesznek valóban gyökök, illetve hány darab lesz közülük az, főleg nagy együtthatók esetén. Ebben nyújt nagy segítséget nekünk Descartes tétele, az alkalmazásával sok számolást megspórolhatunk és kiszűrhetjük a számunkra felesleges törteket. Nézzünk egy példát erre is.

4.2. Példa. *Vizsgáljuk a következő polinom gyökeit a racionális gyökteszt segítségével, majd alkalmazzuk a Descartes-féle előjelszabályt!*

$$f(x) = 4x^4 + 4x^3 + 17x^2 + 16x + 4$$

Mivel $a_0 = a_4 = 4$ és a 4 osztói: ± 1, ± 2 és ± 4, így a gyökteszt a következő $\frac{p}{q}$ értékeket adja: $\pm\frac{1}{1}$, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{4}$, $\pm\frac{2}{1}$, $\pm\frac{2}{2}$, $\pm\frac{2}{4}$, $\pm\frac{4}{1}$, $\pm\frac{4}{2}$, $\pm\frac{4}{4}$. Ezeket egyszerűsítve megkapjuk, hogy a következő racionális gyökök lehetségesek: ± 1, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{4}$, ± 2, ± 4.

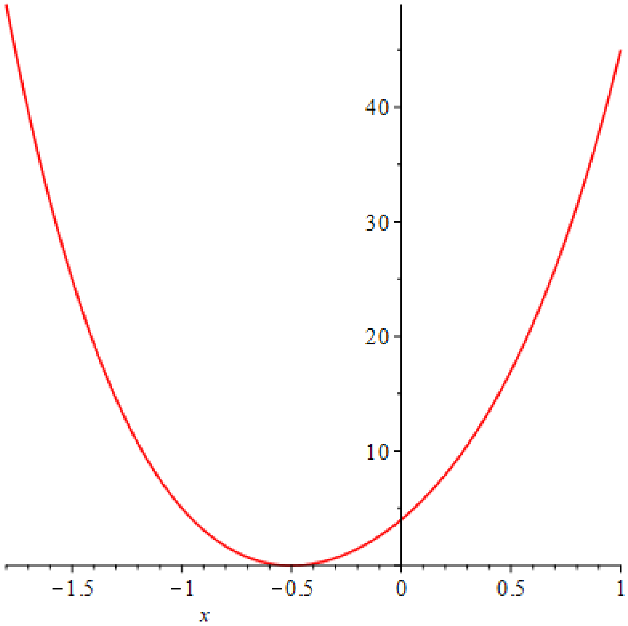
A polinom együtthatói mind pozitívak, így az előjelváltások száma 0. Descartes tétele miatt tehát nem létezik pozitív gyök, azaz a lehetséges racionális gyökök már csak a -1, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$, -2 és a -4. Vizsgáljuk $f(-x)$-et:

$$\begin{aligned} f(-x) &= 4(-x)^4 + 4(-x)^3 + 17(-x)^2 + 16(-x) + 4 \\ &= 4x^4 - 4x^3 + 17x^2 - 16x + 4. \end{aligned}$$

Itt 4 darab előjelváltás található, azaz a negatív gyökök száma 4, 2 vagy 0 lehet. A következő esetek adódnak:

Pozitív gyökök száma	Negatív gyökök száma	Nem valós gyökök száma
0	4	0
0	2	2
0	0	4

A függvény grafikonját a 2. ábrán látjuk. $-\frac{1}{2}$-ben veszi fel a minimumát a polinom, ám ez nem inflexiós pont. Kiderül, hogy a második eset áll fenn, a 2-multiplicitású negatív gyök $-\frac{1}{2}$. A másik két gyök nem valós, egymás konjugáltjai.



2. ábra

A következő fontos alkalmazási területe az előjelszabálynak a valós szimmetrikus mátrixok sajátértékeinek vizsgálata. Ismert, hogy csak valós sajátértékeik vannak, tehát a tétel segítségével meg tudjuk kapni pontos számukat, illetve információt kaphatunk előjeleikről is. A vizsgált $f(x)$ polinom a mátrix karakterisztikus polinomja lesz, ekkor a pozitív gyökök száma megegyezik $f(x)$ előjelváltásainak számával, a negatív gyökök száma pedig $f(-x)$ előjelváltásainak számával. Ezekből a számokból a mátrix definitségére is következtethetünk, ennek nagy szerepe van Hesse-mátrixok esetén.

Hesse-mátrixnak nevezzük egy többváltozós valós függvény másodrendű parciális deriváltjaiból alkotott négyzetes mátrixot, egy $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-változós valós függvény esetén ez a következő alakú:

$$\mathbf{H}^f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix},$$

ha $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ f értelmezési tartományának egy belső pontja, ahol f mindegyik másodrendű parciális deriváltja létezik. ∂ a parciális deriválás, ∂^2 pedig a másodrendű parciális deriválás jele. A Young-tétel értelmében, ha a másodrendű parciális deriváltak folytonosak, akkor a vegyes parciális deriváltak egyenlőek, így ekkor ez egy szimmetrikus mátrix.

A Hesse-mátrix definitségéből következtethetünk a lokális szélsőértékek létezésére. Ha x^* stacionárius pontja $f(x)$-nek, azaz az összes elsőrendű parciális deriváltja eltűnik ebben a pontban, a következők teljesülnek.

- Ha f Hesse-mátrixa pozitív definit x^*-ban, akkor f-nek lokális minimuma van x^*-ban.
- Ha f Hesse-mátrixa negatív definit x^*-ban, akkor f-nek lokális maximuma van x^*-ban.
- Ha f Hesse-mátrixa indefinit x^*-ban, akkor f-nek x^*-ban nyeregpontja van, nincs lokális szélsőérték itt.

Egy valós szimmetrikus mátrix pontosan akkor pozitív definit, ha minden sajátértéke pozitív, negatív definit, ha minden sajátértéke negatív, indefinit pedig pontosan akkor, ha létezik pozitív és negatív sajátértéke is. Most nézzünk egy példát, hogyan tudjuk a Descartes-féle előjelszabályt használni egy mátrix definitségének meghatározására, majd ennek segítségével egy többváltozós függvény lokális szélsőértékeinek megtalálására.

4.3. Példa. *Határozzuk meg a következő függvény lokális szélsőértékeit!*

$$f(x, y, z) = x^3 - 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + xz - yz + 3z$$

A stacionárius pontok megtalálásához az alábbi egyenletrendszert oldjuk meg.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 4x - 2y + z = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 2y - z = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x - y + 2z + 3 = 0$$

Ennek a két kapott megoldása $a^* = (0, -1, -2)$ és $b^* = (2, 1, -2)$. A másodrendű parciális deriváltakból álló Hesse-mátrix:

$$\mathbf{H}^f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 6x-4 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

ebből a következő két mátrixot kapjuk.

$$\mathbf{H}^f(a^*) = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}^f(b^*) = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

A $\mathbf{H}^f(a^*)$-hoz tartozó karakterisztikus polinom:

$$p_1(\lambda) = -\lambda^3 + 18\lambda - 18.$$

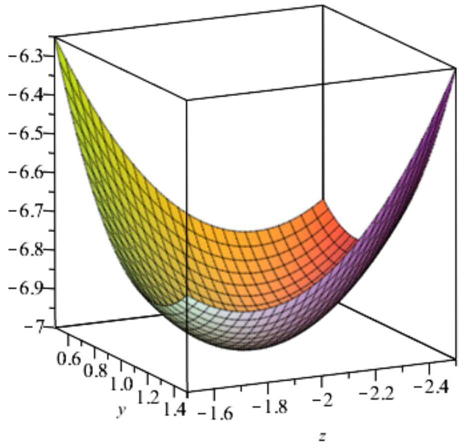
Két előjelváltása van a kifejezésnek, tehát 2 darab pozitív és 1 darab negatív sajátértéke létezik a mátrixnak, azaz indefinit. Ebből tehát megkapjuk, hogy az $a^* = (0, -1, -2)$ pontban nyeregpontja van a függvénynek, nincs szélsőértéke itt.

A $\mathbf{H}^f(b^*)$-hoz tartozó karakterisztikus polinom:

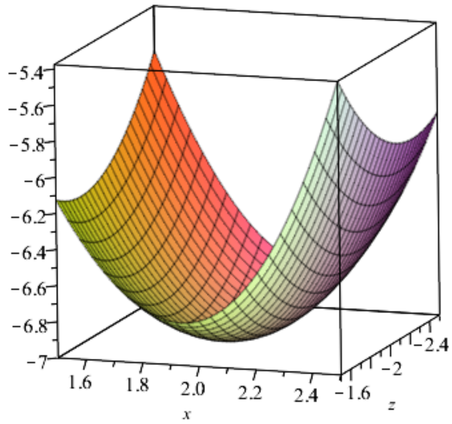
$$p_2(\lambda) = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 30\lambda + 18.$$

A 3 darab előjelváltás miatt a mátrix mindhárom sajátértéke pozitív, tehát pozitív definit. Így a függvény egyetlen szélsőértékét kapjuk meg, a $b^* = (2, 1-2)$ pontban lokális minimuma van. A tétel alkalmazásával ezt az eredményt a sajátértékek kiszámolása nélkül, gyorsan megkaptuk.

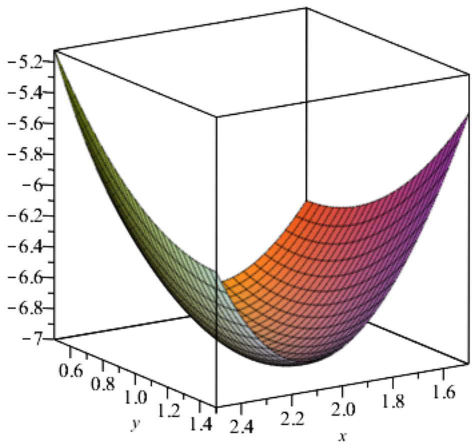
A 3. ábrán az f függvény három metszetét látjuk, rendre az $x = 2$, $y = 1$ és $z = -2$ értékeknél.



(a) $x = 2$



(b) $y = 1$



(c) $z = -2$

3. ábra

5. Budan és Fourier tétele

5.1. Budan tétele

5.1. Tétel (Budan)**.** *Legyen $f(x)$ polinom, a és b két valós szám, $a < b$. Jelölje V_a, illetve V_b az előjelváltások számát $f(x+a)$ és $f(x+b)$ polinomokban és ρ a valós gyökök számát az $(a,b]$ intervallumban, multiplicitással számolva. Ekkor létezik m nemnegatív egész, hogy*

$$\rho = V_a - V_b - 2m.$$

5.2. Fourier tétele

A tétel kimondása előtt bevezetünk egy új fogalmat és néhány jelölést.

5.1. Definíció. *Adott egy n-ed fokú f polinom, ahol n nemnegatív egész szám. Ekkor f Fourier-sorozata:*

$$Der(f) = (f^{(0)}, f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(n)}),$$

ahol $f^{(i)}$ az i-edik deriváltja f-nek, $i = 0, \dots, n$ és $f^{(0)} = f$.

Ha adott polinomok egy $F = (f_0, f_1, \dots, f_k)$ sorozata és egy a valós szám, akkor $V(F, a)$ jelölje az $(f_0(a), f_1(a), \dots, f_k(a))$ sorozatban található előjelváltások számát. Ez a jelölés kiterjeszthető $a = \pm\infty$-re is, $V(F, +\infty)$ az előjelváltások száma $f_i(x)$ főegyütthatói által alkotott sorozatban, $V(F, -\infty)$ pedig az előjelváltások száma $f_i(-x)$ főegyütthatói által alkotott sorozatban. Ezek a fogalmak korrektek, mivel $x \to +\infty$ esetén egy $f(x)$ polinom egy idő után mindig pozitív vagy negatív lesz a főegyüttható előjele szerint, hasonlóan $x \to -\infty$ esetén is. A kiterjesztésre azért van szükség, hogy a Fourier-tétel segítségével egy újabb bizonyítást tudjunk adni Descartes tételére.

Adott f polinom, $a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Ekkor $r(f, a, b)$ jelölje f valós gyökeinek számát az $(a, b]$ intervallumon belül, multiplicitással számolva. $f^{(1)}$-et a következőkben f'-vel jelölöm.

5.2. Tétel (Fourier, Budan–Fourier)**.** *Legyen $f(x)$ egy n-edfokú polinom, ahol n pozitív egész szám, $a < b$ és $a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Ekkor létezik m nemnegatív egész, hogy*

$$r(f, a, b) = V(Der(f), a) - V(Der(f), b) - 2m.$$

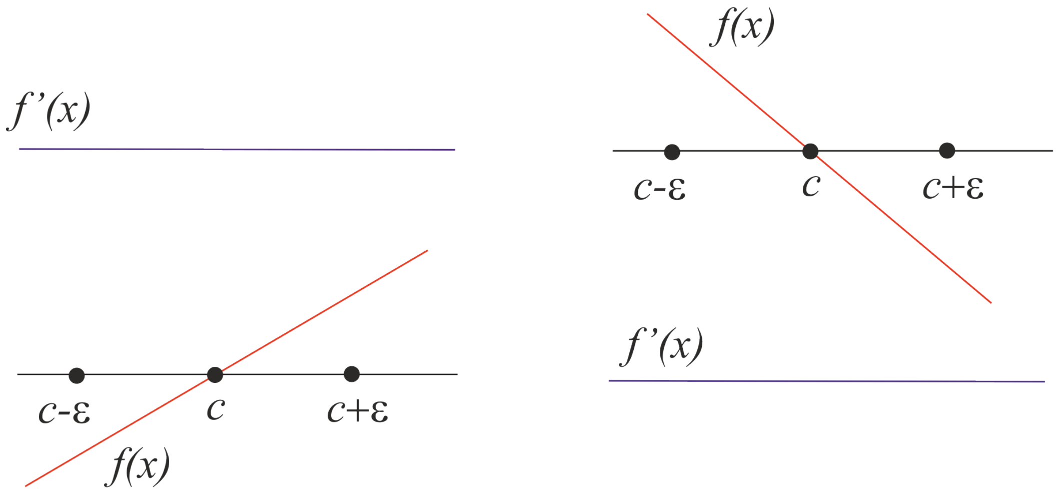
A következő állítás segítségével fogjuk belátni a tételt (lásd [7]).

5.1. Állítás. *Legyen $f(x)$ egy n-edfokú polinom, ahol n pozitív egész szám. Legyen $f(c) = 0$ esetén μ f c gyökének multiplicitása, $f(c) \neq 0$ esetén tekintsük a μ számot nullának. Ha $f^{(k)}$-nak $0 \leq k \leq n$ esetén nincs gyöke egy adott $[c - \epsilon, c) \cup (c, c + \epsilon]$ halmazban, ahol $\epsilon > 0$, akkor*

- *$V(Der(f), c - \epsilon) - V(Der(f), c) - \mu$ nemnegatív, páros szám,*
- *$V(Der(f), c) - V(Der(f), c + \epsilon) = 0$.*

Bizonyítás. Állításunkat deg$f$-re való indukcióval bizonyítjuk.

Ha deg$f = 1$, akkor csak $f(c) = 0$ lehet, a következő két eset egyike áll fenn f' előjelétől függően, $f^{(k)}$ pedig eltűnik minden $2 \leq k \leq n$-re.



4. ábra

A 4. ábrán láthatjuk, hogy ekkor $V(Der(f), c - \epsilon) = 1$ és $V(Der(f), c) = V(Der(f), c + \epsilon) = 0$, tehát a deg$f = 1$ esetre beláttuk az állítást.

Most tegyük fel, hogy deg$f < n$-re igaz, belátjuk deg$f = n$-re. Két esetet vizsgálunk. Először tegyük fel, hogy $f(c) = 0$, azaz $\mu > 0$. Ekkor az indukciós feltevés alapján f'-ra teljesül az állítás, mivel deg$f' < n$ és ekkor c $(\mu - 1)$-multiplicitású gyöke f'-nak, így:

- $V(Der(f'), c - \epsilon) - V(Der(f'), c) - (\mu - 1)$ nemnegatív, páros szám,
- $V(Der(f'), c) - V(Der(f'), c + \epsilon) = 0$.

Mivel polinomok esetében a polinom és deriváltja előjelei egy adott α gyök környezetében $x < \alpha$ esetén különbözőek, $\alpha < x$ esetén pedig megegyeznek a Lagrange-féle középértéktétel alapján, ezért a következő egyenlőségeket írhatjuk fel:

$$V(Der(f), c - \epsilon) = V(Der(f'), c - \epsilon) + 1,$$
$$V(Der(f), c) = V(Der(f'), c),$$
$$V(Der(f), c + \epsilon) = V(Der(f'), c + \epsilon).$$

Ebből már következik az állítás.

Most tegyük fel, hogy $f(c) \neq 0$, azaz $\mu = 0$. Jelölje ν azt, hogy c hányszoros multiplicitású gyöke f'-nak. Ismét alkalmazva az indukciós feltevést megkapjuk:

- $V(Der(f'), c - \epsilon) - V(Der(f'), c) - \nu$ nemnegatív, páros szám,
- $V(Der(f'), c) - V(Der(f'), c + \epsilon) = 0$.

Most vizsgáljuk meg a polinomnak és deriváltjainak előjeleit a c környezetében. Négy eset lehetséges ν paritásának illetve $(f^{(\nu+1)}(c)f(c))$ előjelének alapján.

Ha ν páros és $(f^{(\nu+1)}(c)f(c))$ pozitív:

$$V(Der(f), c - \epsilon) = V(Der(f'), c - \epsilon),$$
$$V(Der(f), c) = V(Der(f'), c),$$
$$V(Der(f), c + \epsilon) = V(Der(f'), c + \epsilon).$$

Ha ν páros és $(f^{(\nu+1)}(c)f(c))$ negatív:

$$V(Der(f), c - \epsilon) = V(Der(f'), c - \epsilon) + 1,$$
$$V(Der(f), c) = V(Der(f'), c) + 1,$$
$$V(Der(f), c + \epsilon) = V(Der(f'), c + \epsilon) + 1.$$

Ha ν páratlan és $(f^{(\nu+1)}(c)f(c))$ pozitív:

$$V(Der(f), c - \epsilon) = V(Der(f'), c - \epsilon) + 1,$$
$$V(Der(f), c) = V(Der(f'), c),$$
$$V(Der(f), c + \epsilon) = V(Der(f'), c + \epsilon).$$

Ha ν páratlan és $(f^{(\nu+1)}(c)f(c))$ negatív:

$$\begin{aligned} V(Der(f), c-\epsilon) &= V(Der(f'), c-\epsilon), \\ V(Der(f), c) &= V(Der(f'), c) + 1, \\ V(Der(f), c+\epsilon) &= V(Der(f'), c+\epsilon) + 1. \end{aligned}$$

Látjuk, hogy az állítás teljesül mind a négy esetben.

□

Budan és Fourier tételét ebből már könnyen beláthatjuk. Igaz, hogy minden $c \in (a,b)$-re fennállnak a következő egyenlőségek:

$$\begin{aligned} r(f,a,b) &= r(f,a,c) + r(f,c,b), \\ V(Der(f),a) - V(Der(f),b) &= V(Der(f),a) - V(Der(f),c) \\ &\quad + V(Der(f),c) - V(Der(f),b). \end{aligned}$$

Legyenek $c_1, c_2, \ldots, c_r$ az $f^{(j)}$ polinomok gyökei az (a,b) intervallumban, minden $0 \leq j \leq n-1$-re, legyen $a = c_0$, $b = c_{r+1}$ és $d_i \in (c_i, c_{i+1})$, azaz:

$$a = c_0 < d_0 < c_1 < \cdots < c_r < d_r < c_{r+1} = b.$$

Ekkor az alábbi egyenletek írhatóak fel, tehát az előző állítás alapján a tétel teljesül.

$$\begin{aligned} r(f,a,b) &= \sum_{n=0}^{r} \big[r(f,c_i,d_i) + r(f,d_i,c_{i+1}) \big], \\ V(Der(f),a) - V(Der(f),b) &= \sum_{n=0}^{r} \big[V(Der(f),c_i) - V(Der(f),d_i) \\ &\quad + V(Der(f),d_i) - V(Der(f),c_{i+1}) \big]. \end{aligned}$$

A $\sum\limits_{n=0}^{r} \big[V(Der(f),c_i) - V(Der(f),d_i) + V(Der(f),d_i) - V(Der(f),c_{i+1}) \big]$ kifejezés vizsgálatakor észrevehető, hogy a $V(Der(f),d_i)$ értékek kiejtik egymást, $i = 0,1,\ldots,r$, illetve a $V(Der(f),c_i)$ értékek is, $i = 1,2,\ldots,r$. Emiatt a fent felírt egyenlőség valóban fennáll, a vizsgált összeg csak a $c_0 = a$ és $c_{r+1} = b$ helyeken vett előjelváltások számától függ.

Észrevehető, hogy a tételben szereplő összefüggés az azonosan 0 polinom kivételével a konstans polinomokra is fennáll. Ekkor $V(Der(f),a) = V(Der(f),b) = 0$ és mivel a gyökök száma is 0, így az $m = 0$ választás megfelelő.

5.3. Tételek ekvivalenciája

Egyszerűen be tudjuk látni, hogy Budan és Fourier tételei ekvivalensek. A Taylor-formula alapján:

$$f(x+a) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} x^i,$$

tehát a $Der(f)$ sorozat tagjainak előjelei az a pontban és $f(x+a)$ megfelelő együtthatóinak előjelei megegyeznek.

5.4. Példák

Először Budan tételére mutatok egy példát.

5.1. Példa. *Vizsgáljuk a következő polinom gyökeit Budan tétele segítségével!*

$$f(x) = x^5 + 4x^4 - 3x^2 + x - 6$$

Descartes tétele alapján 3 vagy 1 darab pozitív gyöke létezik, mivel 3 előjelváltása van a polinomnak. $f(-x) = -x^5 + 4x^4 - 3x^2 - x - 6$, így a negatív gyökök száma 2 vagy 0 lehet.

Vegyük a $(-2, 0]$ intervallumot.

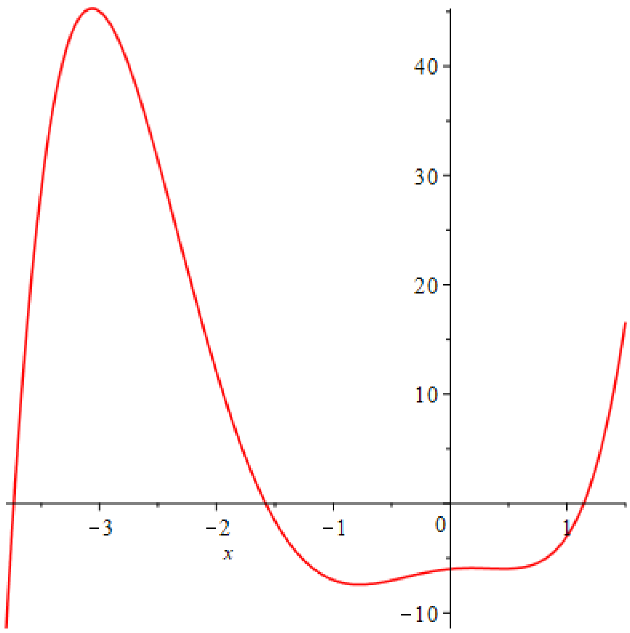
$$\begin{aligned} f(x-2) &= (x-2)^5 + 4(x-2)^4 - 3(x-2)^2 + (x-2) - 6 \\ &= x^5 - 6x^4 + 8x^3 + 13x^2 - 35x + 12 \\ f(x+0) &= f(x) = x^5 + 4x^4 - 3x^2 + x - 6 \end{aligned}$$

Ezekből megkapjuk, hogy $V_{-2} = 4$ és $V_0 = 3$, azaz $V_{-2} - V_0 = 4 - 3 = 1$. Tehát a polinomnak léteznek negatív gyökei, az egyik a $(-2, 0]$ intervallumban található.

$$\begin{aligned} f(x-4) &= (x-4)^5 + 4(x-4)^4 - 3(x-4)^2 + (x-4) - 6 \\ &= x^5 - 16x^4 + 96x^3 - 259x^2 + 281x - 58, \end{aligned}$$

így $V_{-4} = 5$ és $V_{-4} - V_{-2} = 5 - 4 = 1$, vagyis a másik negatív gyök a $(-4, -2]$ intervallumban van.

Budan tételének alkalmazásával pontosabb információkat kaptunk a gyökök számáról és elhelyezkedéséről. Az 5. ábra alapján láthatjuk, hogy a számításaink helyesek. 4 darab lokális szélsőértéket látunk, ezek megadják a polinom deriváltjának mind a 4 gyökét, tehát azt is megkapjuk, hogy az ábrán is látható 1 darab pozitív gyök létezik. A két nem valós gyök egymás konjugáltja.



5. ábra

Most nézzünk egy példát arra, hogy Fourier módszerét hogyan alkalmazhatjuk.

5.2. Példa. *Vizsgáljuk a következő polinom gyökeit Fourier tétele segítségével!*

$$f(x) = 5x^6 - 4x^5 - 27x^4 + 55x^2 - 6$$

Descartes szabálya alapján megkapjuk, hogy 1 vagy 3 darab pozitív gyök és 1 vagy 3 darab negatív gyök létezhet, ezeket az adatokat Fourier tétele segítségével pontosíthatjuk.

Nézzük meg a polinom deriváltjait, ezek alkotják f Fourier-sorozatát:

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= 5x^6 - 4x^5 - 27x^4 + 55x^2 - 6\\
f^{(1)}(x) &= 30x^5 - 20x^4 - 108x^3 + 110x\\
f^{(2)}(x) &= 150x^4 - 80x^3 - 324x^2 + 110\\
f^{(3)}(x) &= 600x^3 - 240x^2 - 648x\\
f^{(4)}(x) &= 1800x^2 - 480x - 648\\
f^{(5)}(x) &= 3600x - 480\\
f^{(6)}(x) &= 3600.
\end{aligned}$$

Tekintsük a $(0, 2]$ intervallumot. Az $x = 0$ helyen a deriváltak sorozata a következő alakú:

$$(-6, 0, 110, 0, -648, -480, 3600),$$

míg az $x = 2$ helyen:

$$(-26, -4, 574, 2544, 5592, 6720, 3600).$$

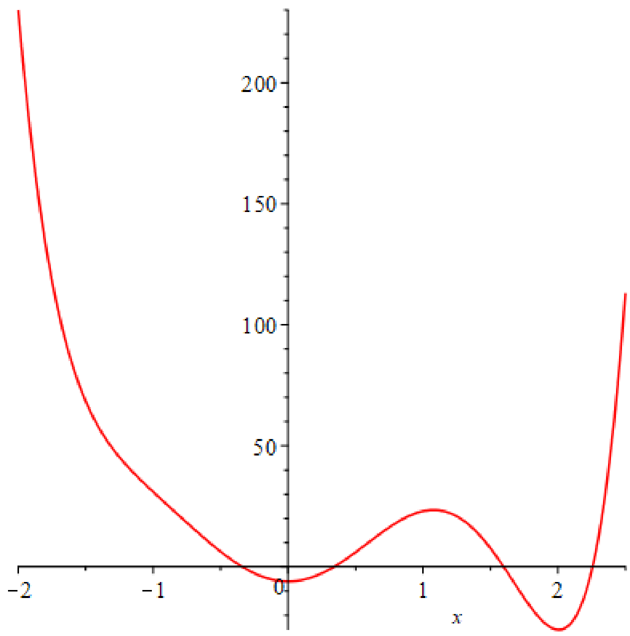
Ezekből megkapjuk, hogy $V(Der(f), 0) = 3$ és $V(Der(f), 2) = 1$, amikből $V(Der(f), 0) - V(Der(f), 2) = 3 - 1 = 2$, azaz az intervallumban 0 vagy 2 darab valós gyök létezik. Megvizsgálhatjuk a $(-\infty - 1]$ intervallumot is, a vizsgált sorozat az $x = -\infty$ helyen:

$$(5, -30, 150, -600, 1800, -3600, 3600),$$

az $x = -1$ helyen pedig:

$$(31, -52, 16, -192, 1632, -4080, 3600),$$

tehát $V(Der(f), -\infty) - V(Der(f), -1) = 6 - 6 = 0$, ebben az intervallumban nem létezik gyök.



6. ábra

A 6. ábrán láthatjuk a függvény grafikonját. Ez alapján a $(-1, 0]$ intervallumban lesz az 1 darab negatív gyöke a polinomnak, a pozitív gyökök száma pedig 3 lesz, ebből 2 darab a vizsgált $(0, 2]$ intervallumban helyezkedik el. A maradék két gyök nem valós, egymás konjugáltjai.

5.5. Újabb bizonyítás a Descartes-féle előjelszabályra

A tétel alkalmazásával egy rövidebb bizonyítást mutatunk a Descartes-féle előjelszabályra. Tekintsük az f polinomot és deriváltjait:

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\
f^{(1)}(x) &= n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 \\
f^{(2)}(x) &= (n-1)n a_n x^{n-2} + (n-2)(n-1)a_{n-1}x^{n-3} + \cdots + 2a_2 \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= (n!)a_n.
\end{aligned}$$

Fourier tétele alapján létezik m nemnegatív egész, hogy

$$r(f, 0, +\infty) = V(Der(f), 0) - V(Der(f), +\infty) - 2m.$$

Igaz, hogy $V(Der(f), 0) = V(a_0, a_1, 2a_2, \ldots, (n!)a_n)$ és $V(Der(f), +\infty) = 0$, mivel a deriváltak főegyütthatóinak előjelei megegyeznek a_n előjelével. Ezek alapján megkapjuk:

$$r(f, 0, +\infty) = p = V(a_0, \ldots, a_n) - 2m,$$

ez pont a Descartes-féle előjelszabály.

5.6. Gyökök szétválasztása

A korábbi tételek leggyakrabban a valós gyökök szétválasztásakor kerülnek elő. A feladat olyan valós intervallumokat találni, melyek diszjunktak, mindegyik intervallum pontosan egy gyököt tartalmaz és a polinom minden valós gyöke benne van egy ilyen intervallumban. Ha ezeket megtaláltuk, a következő lépés, hogy minél jobban leszűkítsük őket, mivel így pontosabb becsléseket tudunk adni a gyökökre. Descartes, Budan és Fourier mind jelentős szerepet játszottak abban, hogy ma már számos hatékony algoritmus létezik a szétválasztásra. Nézzünk meg két tételt, amik Budan és Fourier eredményeit felhasználva, azok továbbgondolásával jöttek létre.

Sturm tételének kimondása előtt szükségünk lesz a Sturm-sorozat fogalmára. Tekintsünk egy $f(x)$ polinomot és tegyük fel, hogy nincs többszörös gyöke. Az euklideszi algoritmussal kiszámoljuk f és f' legnagyobb közös osztóját, legyen $f(x) = f_0(x)$ és $f'(x) = f_1(x)$:

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= q_0(x)f_1(x) - f_2(x) \qquad (2)\\
f_1(x) &= q_1(x)f_2(x) - f_3(x)\\
f_2(x) &= q_2(x)f_3(x) - f_4(x)\\
&\vdots\\
f_{m-2}(x) &= q_{m-2}(x)f_{m-1}(x) - f_m(x)\\
f_{m-1}(x) &= q_{m-1}(x)f_m(x).
\end{aligned}$$

A (2) egyenletrendszer tagjainak átrendezéséből megkapjuk $f_2, f_3, \ldots, f_m$ kifejezéseket:

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= q_0(x)f_1(x) - f_0(x)\\
f_3(x) &= q_1(x)f_2(x) - f_1(x)\\
&\vdots\\
f_m(x) &= q_{m-2}(x)f_{m-1}(x) - f_{m-2}(x).
\end{aligned}$$

5.2. Definíció. *Legyen f egy n-edfokú polinom, aminek nincsenek többszörös gyökei, n nemnegatív egész szám. Ekkor a fenti $S(f) = (f_0, f_1, \ldots, f_m)$ sorozatot f Sturm-sorozatának nevezzük.*

Igaz, hogy $\deg f_i > \deg f_{i+1}$ bármely $0 \le i < m$-re, hiszen az euklideszi algoritmussal polinomok csökkenő fokszámú sorozatát kapjuk. A következő állításban megtalálható tulajdonságokra lesz még szükségünk.

5.2. Állítás. *Legyen $f(x)$ polinom, melynek nincsenek többszörös gyökei. Ekkor f Sturm-sorozatára a következő tulajdonságok teljesülnek egy $[a, b]$ zárt intervallumban, ahol $a \leq b$ valós számok.*

1. *Bármely $x \in [a, b]$-re $f_m(x) \neq 0$.*
2. *Ha valamely $0 < i < m$-re és $\alpha \in [a, b]$-re $f_i(\alpha) = 0$, akkor $f_{i-1}(\alpha) \neq 0$, $f_{i+1}(\alpha) \neq 0$ és $f_{i-1}(\alpha) = -f_{i+1}(\alpha)$.*

Bizonyítás. 1. Belátjuk, hogy f_0-nak és f_1-nek nem létezik közös gyöke. Legyen α f_0 gyöke, ekkor $f_0(x) = (x - \alpha)g(x)$, ahol $g(x)$-nek nem gyöke α, mivel $f(x)$ polinomról feltettük, hogy nem létezik többszörös gyöke. f_1 az f_0 polinom deriváltja, tehát a következő alakú: $f_1(x) = g(x) + (x - \alpha)g'(x)$. Ebbe behelyettesítve az α számot megkapjuk, hogy $f_1(\alpha) = g(\alpha)$, erről pedig tudjuk, hogy nem lehet nulla, azaz nem létezik közös gyöke f_0-nak és f_1-nek. Így f_m egy nemnulla konstans polinom lesz, tehát valóban nincs gyöke az $[a, b]$ intervallumban.

2. Legyen $f_i(\alpha) = 0$, valamely $0 < i < m$-re és $\alpha \in [a, b]$-re. Indirekt tegyük fel, hogy ekkor $f_{i+1}(\alpha) = 0$. Vizsgáljuk az $f_{k-1}(x) = q_{k-1}(x)f_k(x) - f_{k+1}(x)$ kifejezés értékét az $x = \alpha$ helyen. Ebből megkapjuk, hogy $f_{k-1}(\alpha) = 0$ is teljesül. Ez alapján rekurzióval kijön, hogy α minden $0 \leq i \leq m$-re gyöke lesz az f_i polinomnak. Ez ellentmondás, mivel f_0-nak és f_1-nek nem létezik közös gyöke. Ha indirekt feltevésünk szerint $f_{i-1}(\alpha) = 0$, hasonlóan megkapjuk az ellentmondást.

□

5.3. Tétel (Sturm)**.** *Legyen $f(x)$ n-edfokú polinom, ahol n pozitív egész szám, a és b két valós szám, $a < b$. Ha $f(x)$-nek nincs többszörös gyöke, $f(a) \neq 0$ és $f(b) \neq 0$, akkor*

$$r(f, a, b) = V(S(f), a) - V(S(f), b).$$

Bizonyítás. A bizonyításban $V(S(f), x)$ értékét fogjuk vizsgálni, ahol x az $[a, b]$ intervallumon fut végig. $V(S(f), x)$ akkor változhat, ha $f_k(x) = 0$ valamely $0 \leq k \leq m$-re. Mivel előbb beláttuk, hogy $f_m(x) \neq 0$, minden $x \in [a, b]$-re, elég a következő két esetet vizsgálnunk.

Ha $f_i(x) = 0$ valamely $0 < i < m$-re, vizsgáljuk $f_{i-1}(x)$, $f_i(x)$, $f_{i+1}(x)$ előjelváltásait. f_{i-1} és f_{i+1} ellentétes előjelűek, ám egyikük sem 0 az x helyen az előző állítás alapján. Ekkor a gyök egy elegendően kicsi környezetében sem lesznek nullák, ebben a környezetben sem válthatnak előjelet, ez folytonosságukból következik. Így f_i előjelétől függetlenül összességében nem változik az előjelváltások száma.

Ha $f_0(x) = f(x) = 0$, akkor $f_1(x)$ nem lehet nulla, így f_0 x egy környezetében növekvő vagy csökkenő, f_1 előjele pedig állandó. A növekvő esetben előjele negatívból pozitívba vált, míg deriváltja pozitív, azaz az előjelváltások száma összességében 1-el csökken. A csökkenő eset hasonló, ekkor f_0 pozitívból negatívba vált, deriváltja negatív, tehát az előjelváltások száma ekkor is 1-el csökken.

Beláttuk, hogy $V(S(f), x)$ értéke pontosan akkor fog 1-el csökkenni, ha x f_0 egy gyökén halad át, más esetben nem változik. Tehát ezen előjelváltás csökkenések adják meg a gyökök számát a vizsgált intervallumban.

$\square$

A tételt akár olyan $f(x)$ polinom esetén is használhatjuk, aminek vannak többszörös gyökei. Ekkor f és f' legnagyobb közös osztója egy nem konstans polinom lesz, jelöljük ezt $d(x)$el. Konstruáljuk meg a $(g_0, g_1, \dots, g_m)$ sorozatot a következőképpen:

$$g_k(x) = \frac{f_k(x)}{d(x)}, \qquad k = 0, 1, \dots, m.$$

Polinomok olyan sorozatát kapjuk, melyeknek nincs többszörös gyöke, ezzel a sorozattal már tudjuk alkalmazni a tételt.

Nézzünk egy példát Sturm tételére.

5.3. Példa. *Vizsgáljuk a következő polinom gyökeit Sturm tétele segítségével! (Az $f(x)$ polinomnak nincsenek többszörös gyökei.)*

$$f(x) = x^5 - 3x - 1$$

Végezzük el a polinomokra vonatkozó euklideszi algoritmust $f_0(x) = f(x) = x^5 - 3x - 1$ és $f_1(x) = f'(x) = 5x^4 - 3$ polinomokkal. Az alábbi egyenletek adódnak.

$$x^5 - 3x - 1 = \frac{1}{5}x(5x^4 - 3) - \left(\frac{12}{5}x + 1\right)$$

$$5x^4 - 3 = \left(\frac{25}{12}x^3 - \frac{125}{144}x^2 + \frac{625}{1728}x - \frac{3125}{20736}\right)\left(\frac{12}{5}x + 1\right) - \frac{59083}{20736}$$

A kapott Sturm-sorozat pedig a következő.

$$f_0(x) = x^5 - 3x - 1$$

$$f_1(x) = 5x^4 - 3$$

$$f_2(x) = \frac{12}{5}x + 1$$

$$f_3(x) = \frac{59083}{20736}$$

Nézzük meg az értékeit az $x = -2$, $x = 0$ és $x = 2$ helyeken, majd vizsgáljuk az előjelváltások számát a kapott sorozatokban.

Az $x = -2$ helyen a Sturm-sorozat:

$$\Big(-27, 77, -\frac{19}{5}, \frac{59083}{20736}\Big),$$

az $x = 0$ helyen:

$$\Big(-1, -3, 1, \frac{59083}{20736}\Big),$$

az $x = 2$ helyen pedig:

$$\Big(25, 77, \frac{29}{5}, \frac{59083}{20736}\Big).$$

Innen leolvashatóak az alábbi értékek:

$$V(S(f), -2) - V(S(f), 0) = 3 - 1 = 2,$$
$$V(S(f), 0) - V(S(f), 2) = 1 - 0 = 1.$$

Megkaptuk, hogy a $(-2, 0)$ intervallumban 2 darab gyök található, a $(0, 2)$ intervallumban pedig 1 darab. Az $x = -1$ helyen a Sturm-sorozat:

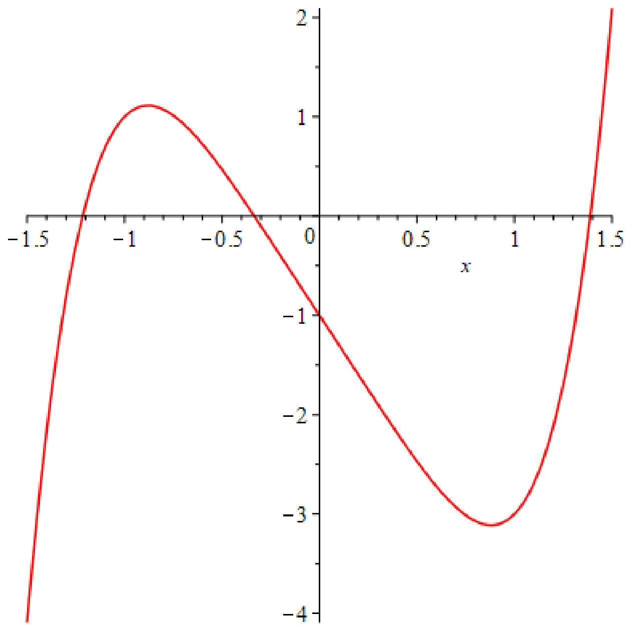
$$\Big(1, 2, -\frac{7}{5}, \frac{59083}{20736}\Big),$$

ennek segítségével a következő egyenleteket is felírhatjuk:

$$V(S(f), -2) - V(S(f), -1) = 3 - 2 = 1,$$
$$V(S(f), -1) - V(S(f), 0) = 2 - 1 = 1.$$

Ezek alapján pedig sikerült találnunk 3 diszjunkt intervallumot, melyek mindegyikében pontosan 1 darab gyök van és mindegyik valós gyök szerepel egy intervallumban. Ez a 3 intervallum a $(-2, -1)$, a $(-1, 0)$ és a $(0, 2)$.

A maradék 2 gyöke a polinomnak nem valós, egymás konjugáltjai. Ez Descartes tétele alapján könnyen látható, mivel $f(x)$ előjelváltásainak száma 1, így csak a talált 1 darab pozitív gyök létezhet, $f(-x)$ előjelváltásainak száma pedig 2, így negatív gyökből nem lehet ennél több, azaz csak a 7. ábrán is látható 3 darab valós gyök létezik.



7. ábra

Sturm ezen eredményével egyszerre két problémát is megoldott. Sikerült egy nyílt intervallumban a polinom gyökeinek pontos számát megadnia és ezzel együtt a valós gyökök szétválasztására is mutatott egy módszert. Így sokáig az ő tételét használták, azonban később Vincent tétele került előtérbe és új algoritmusokat találtak, amik Sturménál sokkal gyorsabbak, hatékonyabbak. Nézzük meg Vincent eredményét is. Ennek bizonyítása most nem célunk, a gondolatmenete az előző tételekéhez hasonló, ám sok más ismeret is szükséges hozzá. A [8] cikk részletesen tárgyalja.

5.4. Tétel (Vincent). *Legyen $f(x)$ egy racionális együtthatós polinom, aminek nincs többszörös gyöke. Végezzük el a következő helyettesítést a kifejezésben:*

$$x = a_1 + \frac{1}{x_1}, x_1 = a_2 + \frac{1}{x_2}, x_2 = a_3 + \frac{1}{x_3} \ldots,$$

ahol a_1 tetszőleges nemnegatív egész, $a_2, a_3, \ldots$ tetszőleges pozitív egészek. Az így kapott polinomnak vagy 0 vagy 1 darab előjelváltása lesz. Ha nem létezik előjelváltás, a polinomnak nincs valós gyöke. Amennyiben 1 darab előjelváltás van, 1 darab pozitív gyök létezik, ez a következő lánctört alakban írható fel:

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots}}}.$$

Annak ellenére, hogy Budan és Fourier tételei ekvivalensek, a gyökök szétválasztására való hatásukat nézve különböznek. Fourier tétele vezetett Sturm módszerének létrejöttéhez, míg Budané Vincent tételéhez, ezáltal pedig a leggyorsabb algoritmusokhoz. Ilyen a Vincent–Collins–Akritas (VCA, 1976, [9]), Vincent–Alesina–Galuzzi (VAG, 2000, [10]) és a Vincent–Akritas–Strzeboński (VAS, 2005, [11]) módszer. Ezek közül is a leggyakrabban használt, leggyorsabb a VAS, ez Vincent tételének direkt megvalósítása. A matematikai programcsomagok többsége, köztük a Mathematica, SageMath és a SymPy is ezt használja alapértelmezettként a gyökök szétválasztására. Ezen algoritmusok vizsgálatában most nem mélyedünk el, ám a további kutatások során érdemes algoritmikus szempontból is mélyebben tanulmányozni a témát.

6. Összefoglalás, további kutatási irányok

Célunk az volt, hogy megismerkedjünk Budan és Fourier tételével és az ehhez kapcsolódó főbb eredményekkel. A bemutatott tételek mind a gyökök és együtthatók közötti összefüggéseket vizsgálják. Descartes tételével a pozitív, illetve negatív gyökök számára kaptunk felső korlátot. Budan és Fourier eredményével már tetszőleges intervallumon belül tudtuk megbecsülni a gyökök számát. Végül Sturm és Vincent tételét néztük meg, amelyekkel már a gyökök szétválasztásának problémájára is megoldást találtunk. A számítógépes technológia fejlődése előtt ezen módszerek gyakran előfordultak a különböző matematikai problémák megoldása során, amikor magasabb fokú egyenletek kerültek elő. Ma már a különböző programcsomagok használatával könnyen megoldhatóak az egyenletek, azonban érdemes belegondolni, hogy a használt algoritmusok milyen eredményeken alapulnak. Mint láttuk, a korábbi fejezetekben taglalt tételek mind fontos alapkövei a mai gyökkereső módszereknek.

Dolgozatom elején egy rövid történeti áttekintést nyújtottam a bemutatott tételekhez kapcsolódóan. A téma a tudománytörténet szempontjából is rendkívül érdekes. Descartes és Fourier mellett a kevésbé ismert matematikusok, Budan, Sturm és Vincent is jelentős eredményeket mutattak fel, melyekre sokáig nem figyeltek fel. Lehetséges, hogy van még olyan figyelemre méltó tétel, állítás korukból, mely feledésbe merült, így tudománytörténeti szempontból is érdemes tovább vizsgálni a területet.

A téma további feldolgozásával kapcsolatban még két kérdést kell felvetnünk. Mit mondhatunk a valós együtthatós polinomok komplex gyökeiről, illetve a komplex együtthatós polinomok gyökeiről? Sok eredmény született már ezekben a témákban is, azonban mindig felvetődnek újabb kérdések, amik megválaszolásra várnak. Különösen felkeltette érdeklődésemet az egyik terület, ez pedig a komplex gyökök elhelyezkedésének geometriája. Izgalmas összefüggéseket mutat például a Gauss–Lucas-tétel és van der Berg tétele, melyek egy komplex együtthatós polinom deriváltjának gyökeiről adnak információt, illetve Jensen tétele, amely pedig egy valós együtthatós polinom deriváltjának komplex gyökeiről szól. A témáról bővebben olvashatunk a [12] könyvben.

Köszönetnyilvánítás

Ezúttal szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Hujter Mihálynak szakdolgozatom során nyújtott támogatásáért. Segített a téma kiválasztásában, a szakirodalom összegyűjtésében és értékes szakmai tanácsaival, útmutatásaival nagyban hozzájárult a dolgozat elkészüléséhez.

Köszönettel tartozom tanáraimnak, Horváth Erzsébetnek, Rónyai Lajosnak és Wettl Ferencnek, akik felkeltették érdeklődésemet az algebra iránt.

Szeretném megköszönni szüleimnek szakmai és lelki támogatásukat, amit tanulmányaim során kaptam tőlük. Hálával tartozom, amiért mellettem álltak a nehéz pillanatokban is.

Külön köszönet illeti Szabados Dórát az elmúlt három évben nyújtott segítségéért, biztatásáért.

Hivatkozások

[1] R. Descartes. *La Géométrie.* Discours De La Méthode. Ian Maire, Leyden, 1637.

[2] F. D. Budan. *Nouvelle Méthode Pour La Résolution Des Équations Numériques.* Chez Courcier, Paris, 1807.

[3] J. B. J. Fourier. *Sur l'Usage Du Théorème De Descartes Dans La Recherche Des Limites Des Racines.* Bull. Sci. Soc. Philomatique Paris, Octobre (1820): 156–165, Décembre (1820): 181-187. Paris, 1820.

[4] J. C. F. Sturm. *Mémoire Sur La Résolution Des Équations Numériques.* Bulletin Des Sciences De Férussac, 11: 419-425. 1829.

[5] J. A. Serret. *Cours D'Algèbre Supérieure.* Gauthier-Villars, Paris, 1877.

[6] J. V. Uspensky. *Theory of Equations.* McGraw-Hill, New York, 1948.

[7] S. Basu, R. Pollack, M-F. Roy. *Algorithms in Real Algebraic Geometry.* Algorithms and Computation in Mathematics, 10. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[8] A. Alesina, M. Galuzzi. *A New Proof of Vincent's Theorem.* L'Enseignement Mathématique, 44 (3-4): 219-256. 1998.

[9] G. E. Collins, A. G. Akritas. *Polynomial Real Root Isolation Using Descartes' Rule of Signs.* Proceedings of the 1976 ACM Symposium on Symbolic and Algebraic Computations: 272-275. Yorktown Heights, N.Y., 1976.

[10] A. C. Alesina, M. Galuzzi. *Vincent's Theorem from a Modern Point of View.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, 64: 179-191. 2000.

[11] A. G. Akritas, A. W. Strzebonski. *A Comparative Study of Two Real Root Isolation Methods.* Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 10 (4): 297-304. 2005.

[12] V. V. Prasolov. *Polynomials.* Algorithms and Computation in Mathematics, 11. Springer-Verlag, Berlin, 2004.