$$f(x)=\frac{1+x}{1-x}, \qquad f^{(n)}(x)=?$$

Legyen $u=1+x$ és $v=(1-x)^{-1}$. Ekkor $f(x)=uv$. Nyilván $u'=1$ és $v'=(-1)(1-x)^{-2}(-1)=v^2$. Tehát

$$f'(x)=u'v+uv'=v+uv^2=v(1+uv)$$

Ebből

$$f''(x)=v'+u'v^2+u(v^2)'=v^2+v^2+2uv^3=2v^2(1+uv)$$

Ebből

$$f'''(x)=2(v^2+uv^3)'=2(2vv'+u'v^3+u(v^3)')=4v^3+2v^3+6uv^4=6v^3(1+uv)$$

Kialakul az a sejtésünk, hogy $n=1,2,3,...$ esetén

$$f^{(n)}(x)=n!v^n(1+uv)$$

Ezt teljes indukcióval bizonyíthatjuk. Már csak azt kell belátni, hogy

$$(n!v^n(1+uv))'=(n+1)!v^{n+1}(1+uv)$$

Kibontva:

$$\begin{aligned}(n!v^n(1+uv))' &= n!((v^n)'(1+uv)+v^n(1+uv)')= \\ n!(nv^{n+1}(1+uv)+v^nuv^2) &= (n+1)!v^{n+1}(1+uv)\end{aligned}$$

Tehát

$$f^{(n)}(x)=n!\frac{1+\frac{1+x}{1-x}}{(1-x)^n}=\frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}=2n!(1-x)^{-(n+1)}$$

Megjegyzés: Lehetett volna úgy is, hogy

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' &= \frac{(1+x)'(1-x)-(1+x)(1-x)'}{(1-x)^2}= \\ \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} &= \frac{2}{(1-x)^2}=2(1-x)^{-2}\end{aligned}$$

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)''=(2(1-x)^{-2})'=2(-2)(1-x)^{-3}(-1)=4(1-x)^{-3}$$

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'''=\left(4(1-x)^{-3}\right)'=4(-3)(1-x)^{-4}(-1)=12(1-x)^{-4}$$

Most alakul ki a sejtésünk, hogy

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{(n)}=2n!(1-x)^{-(n+1)}$$

Ezt persze teljes indukcióval bizonyítjuk:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{(n+1)} &= \left(2n!(1-x)^{-(n+1)}\right)'=2n!(-(n+1))(1-x)^{-(n+2)}(-1)= \\ & 2(n+1)!(1-x)^{-(n+2)}\end{aligned}$$