$f(x) = x^n e^{-x}$ szélsőérték-helyei kellenek!

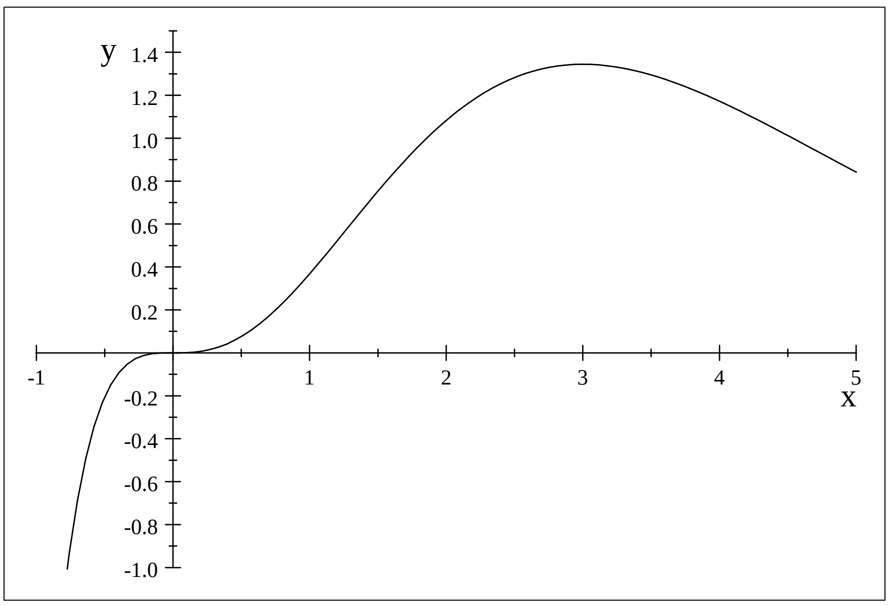
Itt $n = 0$-ra nyilván nincs szélsőérték, feltehetjük tehát, hogy $n = 1, 2, \ldots$. Most

$$f'(x) = nx^{n-1}e^{-x} + x^n e^{-x}(-1) = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x} = (n-x)x^{n-1}e^{-x}$$

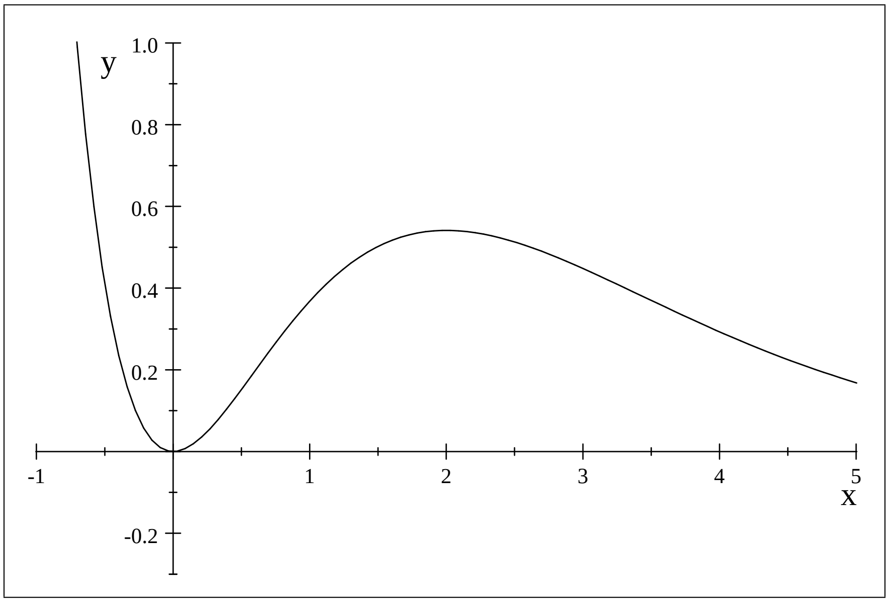
és ebből

$$f''(x) = \left(n(n-1)x^{n-2} - 2nx^{n-1} + x^n\right)e^{-x} = \left(n(n-1) - 2nx + x^2\right)x^{n-2}e^{-x}$$

Szélsőérték csak ott lehet, ahol $f'(x) = 0$, tehát ahol $(n-x)x^{n-1} = 0$. Azaz $x = 0$ vagy $x = n$. Mivel $f''(n) = -n^{n-1}e^{-n} < 0$, ezért n-nél az eredeti függvénynek maximuma van. Mivel $f(0) = 0$, ezért 0-nál páratlan n-re nem lehet szélsőérték, hiszen $x < 0$ esetén $f(x) < 0$, $x > 0$ esetén $f(x) > 0$. A lenti ábra az $n = 3$ esetre vonatkozik.



A páros n-ekre $x < 0$ esetén $f(x) > 0$ és $x > 0$ esetén is $f(x) > 0$, tehát ilyen esetben minimum van. A lenti ábra az $n = 2$ esetre vonatkozik.



y
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.2
-1
1
2
3
4
5
x