Matematika Analízis A1a - 1.zh 07.03.28. A csoport .... Név helye: ...

1. Mutassa meg, hogy a következő sorozat szigorúan monoton nővekvő (2 pont), és számítsa ki a határértékét (3 pont)! (Bizonyítás nélkül felhasználhatja az előadáson elhangzottakat.)

$$\frac{n+5}{n+7}\left(\frac{2n^2+3}{2n^2+2}\right)^{n^2+1}$$

2. Deriválja a következő függvényt (2+3 pont)!

$$\sqrt[3]{2+\log x}+\arctan\sqrt{\sin x}$$

3. Számítsa ki a következő határértéket (5 pont)!

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{e^x-x-1}$$

4. Mely nyilt intervallumban növekszik szigorúan monoton módon a következő függvény (2 pont) és hol van lokális maximuma (3 pont)?

$$\sqrt{x}e^{-4x}$$

Megoldások vázlata:

1.

$$\frac{n+5}{n+7}\left(\frac{2n^2+3}{2n^2+2}\right)^{n^2+1}=\left(1-\frac{2}{n+7}\right)\sqrt{\left(1+\frac{1}{2n^2+2}\right)^{2n^2+2}}\to\sqrt{e}$$

Itt $1-\frac{2}{n+7}$ szigorúan monoton nő és 1-hez tart, és tudjuk, hogy $(1+\frac{1}{k})^k$ szigorúan monoton nő és e-hez tart.

2.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt[3]{2+\log x}\right)=\frac{\sqrt[3]{2+\log x}}{3x(2+\log x)}=(3x)^{-1}(2+\log x)^{-2/3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\arctan\sqrt{\sin x}\right)=\frac{\cos x}{2(1+\sin x)\sqrt{\sin x}}$$

3.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{e^x-x-1} &= \lim_{x\to 0}\frac{-2(\cos x)(-\sin x)}{e^x-1}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{e^x-1}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{e^x}=2\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x}e^{-4x}\right) &= \frac{1-8x}{2\sqrt{x}e^{4x}}\\ &= 0 \text{ ha } x=\frac{1}{8}\\ &> 0 \text{ ha } 0<x<\frac{1}{8}\\ &< 0 \text{ ha } \frac{1}{8}<x\end{aligned}$$

Tehát a függvény a $(0,\frac{1}{8})$ intervallumban növekszik szigorúan monoton módon és a maximuma $\frac{1}{8}$-nál van.