Matematika Analízis A1a - 1.zh 07.03.28. B csoport .... Név helye: ...

1. Mutassa meg, hogy a következő sorozat szigorúan monoton növekvő (2 pont), és számítsa ki a határértékét (3 pont)! (Bizonyítás nélkül felhasználhatja az előadáson elhangzottakat.)

$$\frac{n^3}{n^3+1}\left(\frac{3n^4+4}{3n^4+3}\right)^{n^4+1}$$

2. Deriválja a következő függvényt (3+2 pont)!

$$\arctan\sqrt{\cos x}+\sqrt{x+\log x}$$

3. Számítsa ki a következő határértéket (5 pont)!

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{2+x-2e^x}$$

4. Mely nyilt intervallumban csökken szigorúan monoton módon a következő függvény (2 pont) és hol van lokális minimuma (3 pont)?

$$\sqrt{\frac{x}{e^{4x}}}$$

Megoldások vázlata:

1.

$$\frac{n^3}{n^3+1}\left(\frac{3n^4+4}{3n^4+3}\right)^{n^2+1}=\left(1-\frac{1}{3n^4+3}\right)\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{3n^4+3}\right)^{3n^4+3}}\to\sqrt[3]{e}$$

Itt $1-\frac{1}{n^3+1}$ szigorúan monoton nő és 1-hez tart, és tudjuk, hogy $(1+\frac{1}{k})^k$ szigorúan monoton nő és e-hez tart.

2.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\arctan\sqrt{\cos x}\right)=\frac{-\sin x}{2(1+\cos x)\sqrt{\cos x}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x+\log x}\right)=\frac{1+x}{2x\sqrt{x+\log x}}$$

3.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos^2 x}{2+x-2e^x} = \lim_{x \to 0} \frac{-2(\cos x)(-\sin x)}{1-2e^x}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{1-2e^x} = 0$$

4.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{\frac{x}{e^{4x}}}\right) = \frac{1-4x}{2e^{2x}\sqrt{x}}$$
$$= 0 \text{ ha } x = \frac{1}{4}$$
$$> 0 \text{ ha } 0 < x < \frac{1}{4}$$
$$< 0 \text{ ha } \frac{1}{4} < x$$

Tehát a függvény az $(\frac{1}{4}, +\infty)$ intervallumban csökken szigorúan monoton módon és az $x = 0$ helyen van lokális minimuma, hiszen $\sqrt{\frac{x}{e^{4x}}} \geq 0 = \sqrt{\frac{0}{e^0}}$.