Matematika Analízis A1a - 1.zh 07.03.28. C csoport ... Név helye: ...

1. Mutassa meg, hogy a következő sorozat szigorúan monoton nővekvő (2 pont), és számítsa ki a határértékét (3 pont)! (Bizonyítás nélkül felhasználhatja az előadáson elhangzottakat.)

$$\sqrt{1+n^2}\left(\frac{3n+4}{3n+3}\right)^{n+1}$$

2. Deriválja a következő függvényt (3+2 pont)!

$$\arcsin\sqrt{\cos x}+\log(1+\sqrt{x})$$

3. Számítsa ki a következő határértéket (5 pont)!

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos^2 x-\cos x-1}{1+x-e^x}$$

4. Mely nyilt intervallumban csökken szigorúan monoton módon a következő függvény (2 pont) és hol van lokális minimuma (3 pont)?

$$\frac{e^{4x}}{\sqrt{x}}$$

Megoldások vázlata:

1.

$$\sqrt{1+n^2}\left(\frac{3n+4}{3n+3}\right)^{n+1} > n\cdot\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{3n+3}\right)^{3n+3}}\to+\infty$$

Itt $\sqrt{1+n^2}>n$ szigorúan monoton nő és ∞-hez tart, és tudjuk, hogy $(1+\frac{1}{k})^k$ szigorúan monoton nő és e-hez tart.

2.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\arcsin\sqrt{\cos x}\right)=\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x-\cos^2 x}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\log(1+\sqrt{x})\right)=\frac{1}{2(x+\sqrt{x})}$$

3.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{2\cos^2 x-\cos x-1}{1+x-e^x} &= \lim_{x\to 0}\frac{2(2(\cos x)(-\sin x))-(-\sin x)}{1-e^x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-2\sin 2x}{1-e^x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-2(\cos 2x)2}{-e^x}=\frac{1-4}{-1}=3
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{4x}}{\sqrt{x}}\right) &= \frac{(8x-1)e^{4x}}{2\sqrt{x^3}}\\
&= 0 \text{ ha } x=\frac{1}{8}\\
&< 0 \text{ ha } 0<x<\frac{1}{8}\\
&> 0 \text{ ha } \frac{1}{8}<x
\end{aligned}$$

Tehát a $(0,\frac{1}{8})$ intervallumon csökken szigorúan monoton módon a függvény, és $x=\frac{1}{8}$ pontnál van lokális minimuma.