Matematika Analízis A1a - 1.zh 07.03.28. D csoport ... Név helye: ...

1. Mutassa meg, hogy a következő sorozat szigorúan monoton nővekvő (2 pont), és számítsa ki a határértékét (3 pont)! (Bizonyítás nélkül felhasználhatja az előadáson elhangzottakat.)

$$\sqrt{n}-\sqrt{n+1}+\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

2. Deriválja a következő függvényt (3+2 pont)!

$$\arcsin\sqrt{\log x}+\tan 2x$$

3. Számítsa ki a következő határértéket (5 pont)!

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\log(1-x)}$$

4. Mely nyilt intervallumban csökken szigorúan monoton módon a következő függvény (2 pont) és hol van lokális minimuma (3 pont)?

$$e^{2x}+2e^{-x}$$

Megoldások vázlata:

1.

$$\begin{aligned}\sqrt{n}-\sqrt{n+1}+\left(\frac{n+1}{n}\right)^n &= \frac{n-(n+1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\to e\end{aligned}$$

Itt $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ szigorúan monoton fogy és 0-hoz tart, és tudjuk, hogy $(1+\frac{1}{k})^k$ szigorúan monoton nő és e-hez tart.

2.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\arcsin\sqrt{\log x}\right)=\frac{1}{2x\sqrt{\log x}\sqrt{1-\log x}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\tan 2x)=\frac{2}{\cos^2 2x}$$

3.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\log(1-x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-(-\sin x)}{\frac{-1}{1-x}} = \lim_{x\to 0} ((x-1)\sin x) = 0$$

4.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{2x}+2e^{-x}\right) &= 2e^{2x}-2e^{-x} = 2e^{-x}(e^{3x}-1) \\ &= 0 \text{ ha } x=0 \\ &< 0 \text{ ha } x<0 \\ &> 0 \text{ ha } x>0 \end{aligned}$$

Tehát a függvény a $(-\infty, 0)$ intervallumban szigorúan monoton fogy, és a minimuma a 0-ban van.