1. Számítsa ki a következő sorozatok határértékét!

$$a_n = \frac{3n^2+4n}{n^2+n+1}$$
$$b_n = \frac{n(1+\frac{1}{2n})^n}{n+1}$$

2. Számítsa ki a következő függvények deriváltját!

$$\sqrt{\sin \log x}$$
$$\log \sin \sqrt{x}$$

3. Határozza meg a következő függvények kijelölt határértékeit!

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x+1}{\log x^2}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{\tan x}$$

4. Határozza meg a következő függvény monotonitási tartományait, szélsőértékeinek helyét és azok jellegét!

$$f(x) = x^2 e^{-2x}$$

Megoldások vázlata:

1.

$$\frac{3n^2+4n}{n^2+n+1} = \frac{3+\frac{4}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \to 3$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(1+\frac{1}{2n})^n}{n+1} = \sqrt{e}$$

mert

$$\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$$
$$(1+\frac{1}{2n})^n = \sqrt{(1+\frac{1}{2n})^{2n}} \to \sqrt{e}$$

2.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{\sin \log x}\right) = \frac{\cos \log x}{2x \sin \log x}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\log \sin \sqrt{x}\right) = \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x} \sin \sqrt{x}}$$

3.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\log x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\partial}{\partial x}(x+1)}{\frac{\partial}{\partial x}(\log x^2)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\frac{2}{x}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin x^2\ \right)}{\frac{\partial}{\partial x}(\tan x\ )}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos x^2}{1+\tan^2 x}=0$$

4.

$$f(x)=x^2e^{-2x}$$

$$D_f=(-\infty,+\infty)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2e^{-2x}\right)&=\frac{2x(1-x)}{e^{2x}}\\&=0 \text{ ha } x=0 \text{ vagy } x=1\\&>0 \text{ ha } 0<x<1\\&<0 \text{ ha } x<0 \text{ vagy } x>1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x(1-x)}{e^{2x}}\right)&=\frac{4x^2-8x+2}{e^x}\\&=0 \text{ ha } x=1-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ vagy } x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}\\&>0 \text{ ha } 1-\frac{\sqrt{2}}{2}<x<1+\frac{\sqrt{2}}{2}\\&<0 \text{ ha } x<1-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ vagy } x>1+\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$R_f=[0,+\infty)$$

Tehát a függvény szigorúan monoton fogy $(-\infty,0)$-ban, globális minimuma van 0-ban 0 értékkel, szigorúan monoton nő $(0,1)$-ben, lokális maximuma van 1-ben e^{-2} értékkel, és szigorúan monoton fogy $(1,+\infty)$-ben.