Alkalmazott algebra pótzárthelyi, 2011. november 17.

1. *Az alábbi mátrixok közül melyek normálisak, melyek pozitív definitek?*
$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   A_1 normális, $A_1 A_1^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = A_1^T A_1$. Ezért A_2 is normális, hiszen blokk diagonális normális blokkokkal. A_3 nem normális: $A_3^T A_3$ második sorának második eleme $4 \cdot 4$, míg $A^3 A_3^T$-ban a megfelelő elem $4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 5$. A_4 és A_5 szimmetrikus, így normális. A_1, A_2, A_3 nem szimmetrikusak, ezért nem lehetnek definitek. A_4 főátlójában előfordul 0, míg A_5 szinguláris (első és harmadik sora ugyanaz), ezért nem lehetnek definitek.

2. *Hét kalapunk van, mindegyikben legfeljebb 1 nyúllal. Minden egyes $i \in \{1, \ldots, 7\}$-re igaz az, hogy a nem az i-edik kalapban levő nyulak száma páros. Hányféleképpen lehetséges ez?*

   Legyen x_i az i-edik kalapban levő nyulak száma és s a nyulak összlétszáma. A feltételek azzal egyenértékűek, hogy $s - x_i$ páros minden egyes i-re. De akkor az x_i-k mind ugyanolyan paritásúak, így azonosak. Tehát vagy minden kalapban van egy-egy nyúl, vagy egyikben sincs. Mindkét lehetőség teljesíti is az előírásokat.

3. *Határozzuk meg a $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix Moore–Penrose-féle pszeudoinverzét!*

   B (egy) SVD-je $B = I_2 \begin{pmatrix} 2 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, így $B^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \\ & 1 \end{pmatrix} I_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. *Tegyük fel, hogy C egy olyan $n \times n$-es nemnegatív elemű primitív mátrix, amelyre $C^3 = C$. Igazoljuk, hogy C mindegyik eleme pozitív.*

   Tudjuk, hogy van olyan k pozitív egész, hogy C^k pozitív elemű. De ekkor C^{k+1} és C^{k+2} is pozitív elemű, így $C^{2\ell+1} > 0$ valamely $\ell > 0$ egészre. Ugyanakkor $C^{2\ell+1} = C^{2(\ell-1)+3} = C^{2(\ell-1)}C^3 = C^{2(\ell-1)+1} = \ldots = C^{2+1} = C^3 = C$.

5. *Van-e olyan 2×2-es valós D mátrix, amelyre $\lim_{k\to\infty} D^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?*

   Nincs. Tegyük fel indirekte, hogy $\lim_{k\to\infty} D^k = L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ekkor $\lim_{k\to\infty} D^{2k} = L$, hiszen az eredeti D^k sorozatnak a minden második tagjából álló részsorozatáról van szó. Ugyanakkor (mivel a mátrixok négyzetre-emelése folytonos leképezés) $\lim_{k\to\infty} D^{2k} = \lim_{k\to\infty} (D^k)^2 = (\lim_{k\to\infty} D^k)^2 = L^2$. De $L^2 \neq L$, ellentmondás.

6. *Mi az $M = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 & 6 \\ 7 & 9 & 2 & 6 \\ 9 & 2 & 7 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ mátrix legnagyobb szinguláris értéke?*

   M egy szimmetrikus mátrix, így szinguláris értékei a sajátértékeinek abszolút értékei. Ezért a legnagyobb zsinguláris érték a spektrálsugárral azonos. Mivel M nemnegatív (sőt pozitív) elemű, a legkisebb sorösszeg alsó, a legnagyobb pedig felső korlát a spektrálsugárra. Mindkettő 24.