Alkalmazott algebra zárthelyi, 2009. október 30.

1. *Hány megoldása van a kételemű test felett a következő egyenletrendszernek?*

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & = & 0\\
x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & & & & & = & 1\\
 & & x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & 1\\
x_1 & & & + & x_3 & & & & & + & x_6 & = & 0\\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & + & x_6 & = & 1\\
 & & x_2 & & & & & & & + & x_6 & = & 0
\end{array}$$

A válasz 4, ez látható Gauss-eliminációval (mind a baloldal mátrixa, mind a kibővített mátrix rangja 4, tehát az egyenletrendszer megoldható és a balodali mátrix magja 2 dimenziós). Egy gyors ad hoc megoldás: a hatodik egyenletből $x_6 = x_2$ és a harmadik egyenletből $x_4 = x_2 + 1$. Ezeket behelyettesítve a többi egyenletbe, az elsőből $x_1 + x_2 + x_5 = 1$, a másodikból, negyedikből és ötödikből pedig egyaránt $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. A megoldások: x_1, x_2 lehet akármi ($\{0,1\}$-ből), $x_3 = x_1 + x_2$, $x_4 = x_2 + 1$, $x_5 = x_1 + x_2 + 1$, $x_6 = x_2$.

2. *Az alábbi mátrixok közül mely(ek) reducibilis(ek), mely(ek) primitív(ek)?*

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

M_1, M_2, M_4 egy-egy erősen összefüggő irányított gráf adjacencia-mátrixa, tehát ezek irreducibilisek. M_3 esetén a $a_{ij} = 0$, ha $j \in \{1,3\}$ és $i \notin \{1,3\}$, így M_3 reducibilis. Az irreducibils mátrixok primitívek is. Az M_4 mátrixnak van pozitív átlós eleme, míg $M = M_1$ vagy $M = M_2$-re M^2 primitív, mert irreducibilis és van pozitív átlós eleme. Tehát $M^{2k} > 0$ valamely k-ra, és így M is primitív.

3. *Mekkora lehet egy duplán sztochasztikus mátrix legnagyobb* **szinguláris** *értéke?*

Ha A duplán sztochasztikus, akkor A^T is az, és így $A^T A$ is. A legnagyobb szinguláris értékének négyzete $A^T A$ legnagyobb sajátértéke, ami a $A^T A$ sztochasztikus volta miatt 1.

4. *Legyen A egy nemnegatív elemű négyzetes mátrix, amelyre $A^2 = A$. Igazoljuk, hogy A csak úgy lehet irreducibilis, ha A minden eleme pozitív.*

Ha $A^2 = A$, azaz A egy vetítés, akkor A sajátértékei 0 és 1. Ha A irreducibilis is, akkor A legnagyobb sajátértéke (ami 1) 1-szeres. De ekkor nincs A-nak más 1 abszolút értékű sajátértéke, így A egyben primitív is. De akkor A^k pozitív valamely k-ra, és $A = A^2 = A^3 = \ldots = A^k$.

5. *Legyen A egy $m \times n$-es valós mátrix. Igazoljuk, hogy*

$$\max_{v \in \mathbb{R}^n, |v|=1} |Av| = \sigma_1,$$

ahol σ_1 az A mátrix legnagyobb szinguláris értéke!

A "total least squares"-nél alkalmazott érvelést másoljuk le, csak ellenkező irányú egyenlőtlenséggel: Legyen $|v| = 1$ és legyen $v_1, \ldots, v_n$ az $A^T A$ sajátvektoraiból alló ortonormált bázis, ahol $A^T A v_i = \sigma_i^2$ és $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n \geq 0$. Írjuk fel v-t $v = \sum_{i=1}^n \gamma_i v_i$ alakban. Ekkor $\sum_{i=1}^n \gamma_i^2 = 1$ és

$$|Av|^2 = (Av, Av) = (A^T Av, v) = (\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \gamma_i v_i, \sum_{i=1}^n \gamma_i v_i) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \gamma_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \sigma_1^2 \gamma_i^2 = \sigma_1^2.$$

Egyenlőség elérhető a $v = v_1$ választással.

6. *Legyen A egy $m \times n$-es valós mátrix. Legyen B az az $(m+n) \times (m+n)$-es mátrix, amelynek bal felső $m \times m$-es, valamint jobb alsó $n \times n$ blokkja a csupa 0 mátrix, a bal alsó $n \times m$-es blokkja az A^T, jobb felső $m \times n$-es blokkja pedig az A mátrix:*

$$B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline A^T & 0 \end{array}\right).$$

Milyen összefüggés van A szinguláris értékei és B sajátértékei között?

Legyen A rangja r és A pozitív szinguláris értékei $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$. Ekkor a A^T rangja is r. Ha w egy $n+m$ hosszú oszlopvektor, amely $w = (u,v)^T$ alakú, ahol u egy n hosszúm v pedig egy m hosszú oszlopvektor, akkor $Bw = (A^T v, Au)^T$ alakú. Innen világos, hogy $w \in \ker B$ akkor és csak akkor teljesül, ha $u \in \ker A$ és $v \in \ker A^T$. Ezért $\ker B$ dimenziója $m + n - 2r$. Legyenek $u_1, \ldots, u_r$ olyan lineárisan független vektorok, hogy u_i az $A^T A$ mátrix sajátvektora σ_i^2 sajátértékkel. Ekkor a $w_i = (u_i, \frac{1}{\sigma_i} A u_i)^T$ oszlopvektorra $B w_i = (\frac{1}{\sigma_i} A^T A u_i, A u_i)^T = \sigma_i w_i$. Hasonlóan, az $w_i' = (u_i, \frac{-1}{\sigma_i} u_i)^T$ vektorra $B w_i' = -\sigma_i w_i$. Az $u_1, \ldots, u_r$ lineárisan függetlenek, továbbá az $\frac{1}{\sigma_1} A u_1, \ldots, \frac{1}{\sigma_r} A u_r$ vektorok is lineárisan függetlenek, tehát a $w_1, w_1', w_2, w_2', \ldots, w_r, w_r'$ rendszer is lineárisan független. ($(u_i, 0)^T = \frac{1}{2}(w_i + w_i')$, és $(0, \frac{1}{\sigma_i} A u_i)^T = \frac{1}{2}(w_i - w_i')$. Innen az $\{(u_i, 0)^T, (0, \frac{1}{\sigma_i} A u_i)^T | 1 \leq i \leq r\}$ rendszer lineáris függetlenségét alkalmazhatjuk.) Tehát nemnulla sajátértékekhez tartozó sajátvektorok kifeszítenek egy rangnyi (azaz $2r$) dimenziós alteret. Következésképpen $\pm\sigma_i$ az összes nemnulla sajátérték.