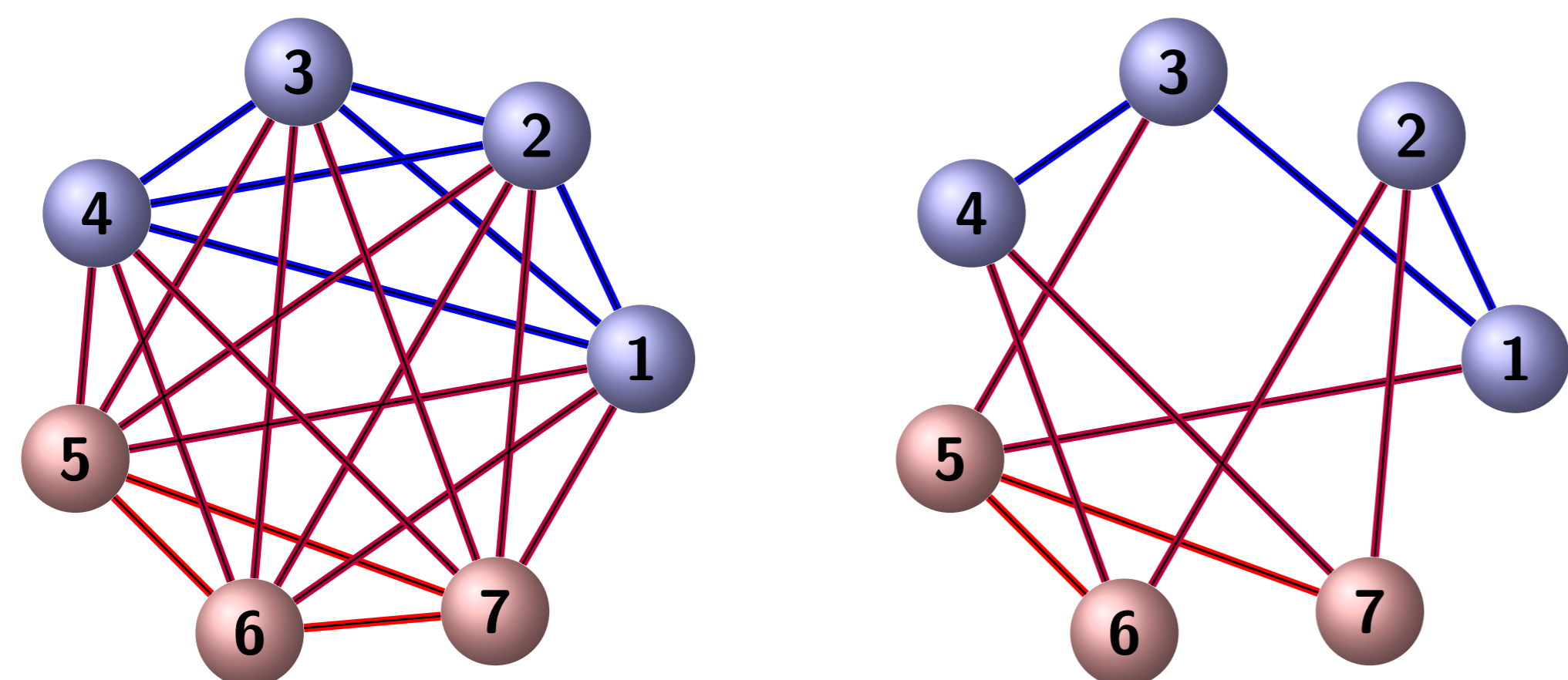


avagy mi köze a családfáknak ahhoz, hogy milyen hosszú a legrövidebb út Kukutyinból Piripócsra?

Véletlen gráf modell

- minden csúcsnak van egy típusa
- két csúcs közt a típusoktól függő valószínűséggel van kapcsolat (él)
- az éleknek hosszuk is van (költség, távolság vagy idő)

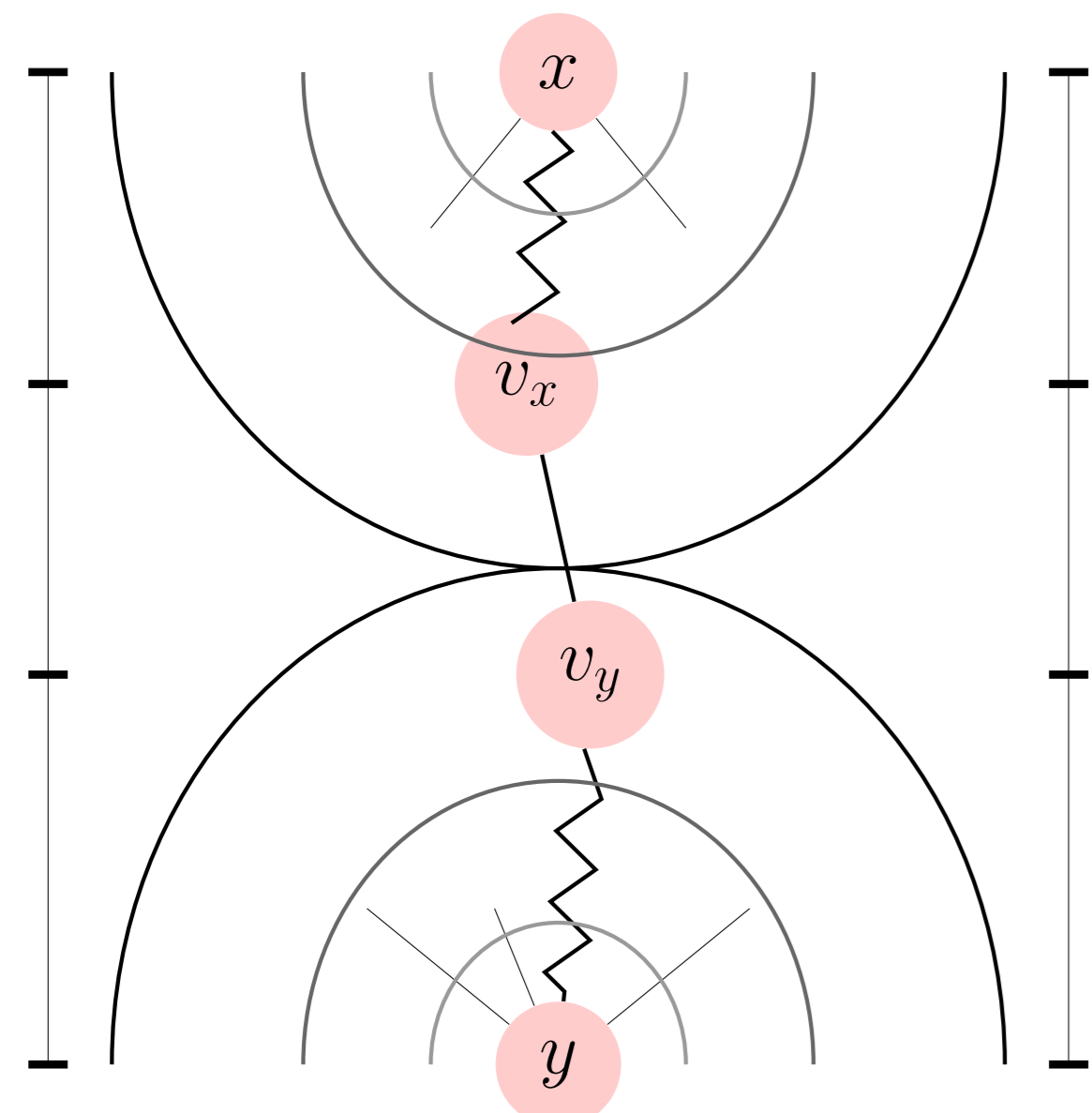


Matematikai modell

- Csúcsok:** n csúcs, 1-től n -ig számozva
- Típusok:** minden csúcsnak van egy típusa 1-től r -ig (t_i az i . csúcs típusa)
- Élek:** minden csúcspár (i, j) közt $p(t_i, t_j)$ valószínűséggel fut él, egymástól függetlenül
- Átlagos szomszédszám feltevése:** Feltesszük, hogy egy csúcs átlagos szomszédszáma nem függ a típusától ($\lambda + 1$ -gyel jelöljük)
- Élsúlyok:** minden meglévő élre véletlen élhossz kerül (exponenciális háttéreloszlásból függetlenül sorsolva)

Keressünk legrövidebb utat!

- Milyen hosszú a legrövidebb út két véletlen csúcs közt?
- Hány csúcs van rajta? (hány falun kell átmenni...)
- Hogyan tudjuk megtalálni?



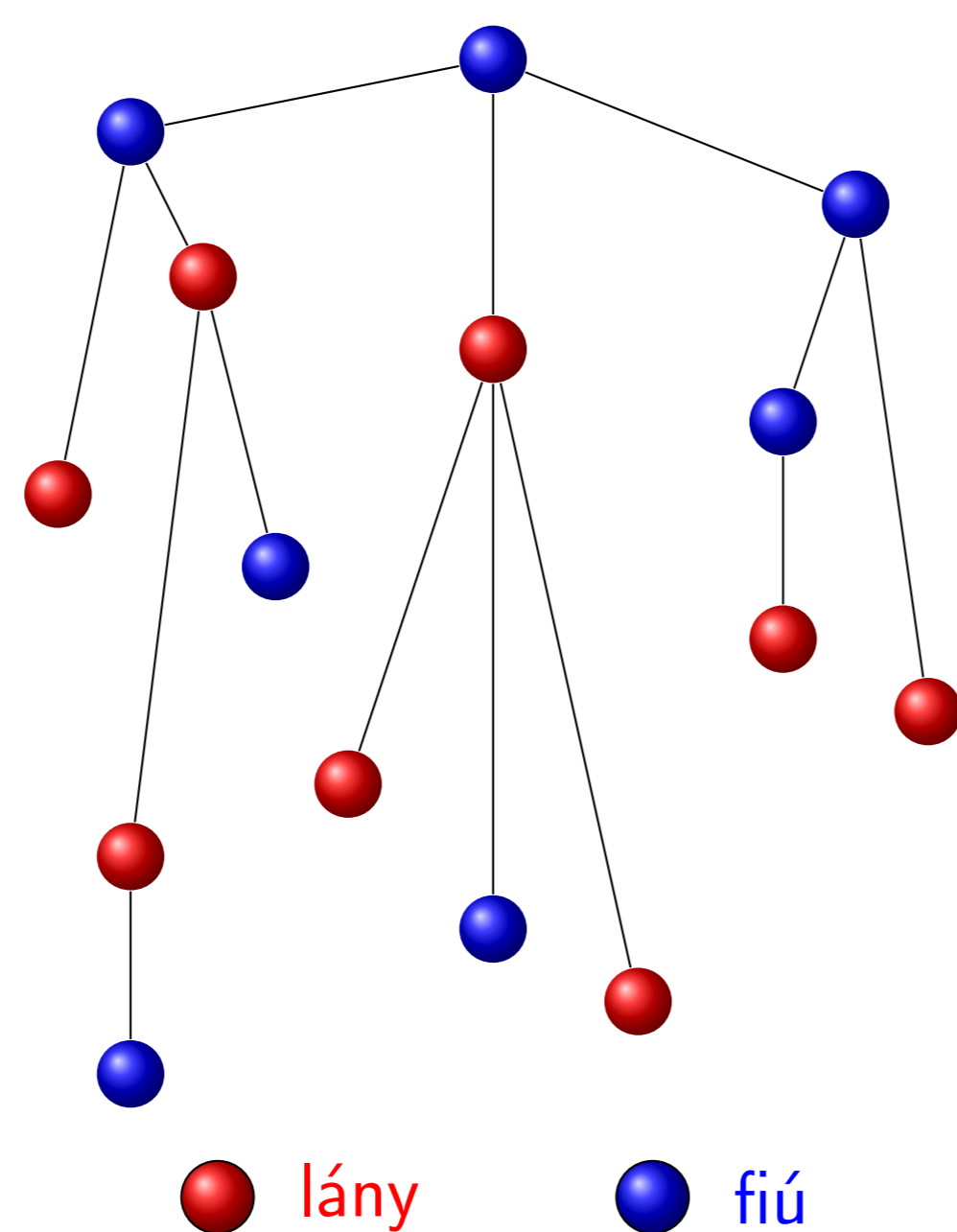
Folyamok

- Vízcsap** a két csúcsba: Nyissuk ki!
- A víz **egyenletes sebességgel** folyik,
- Összeéréskor** legrövidebb utat talál.
- Mikor lesz vizes egy csúcs?
- Hogyan lehet ezt matematikailag precízzé tenni?...
- Kereső bejárást** indítunk a két csúcsból, ami sok analógiát mutat a...

Családfák

Többtípusos Leszármazási fák

- Élettartam:** Minden egyed valamennyi ideig él (véletlen, eloszlása ismert)
- Osztódás:** Amikor meghal, akkor szüli különböző típusú gyerekeit, (véletlen darabot)
- Sorrend kuszája:** Mi az m . osztódó generációja, vagyis hány csúcsra van a közös őstől?
- Időpontok:** Mikor hal meg az m . osztódó, vagyis milyen messze van a közös őstől időben?



Az ábra egy családfa időbeli fejlődését mutatja, ahol az idő fentről lefelé halad: a függőleges távolság a közös őstől jelenti a születési időpontot. Láthatjuk, hogy a generációk időben "keverednek".

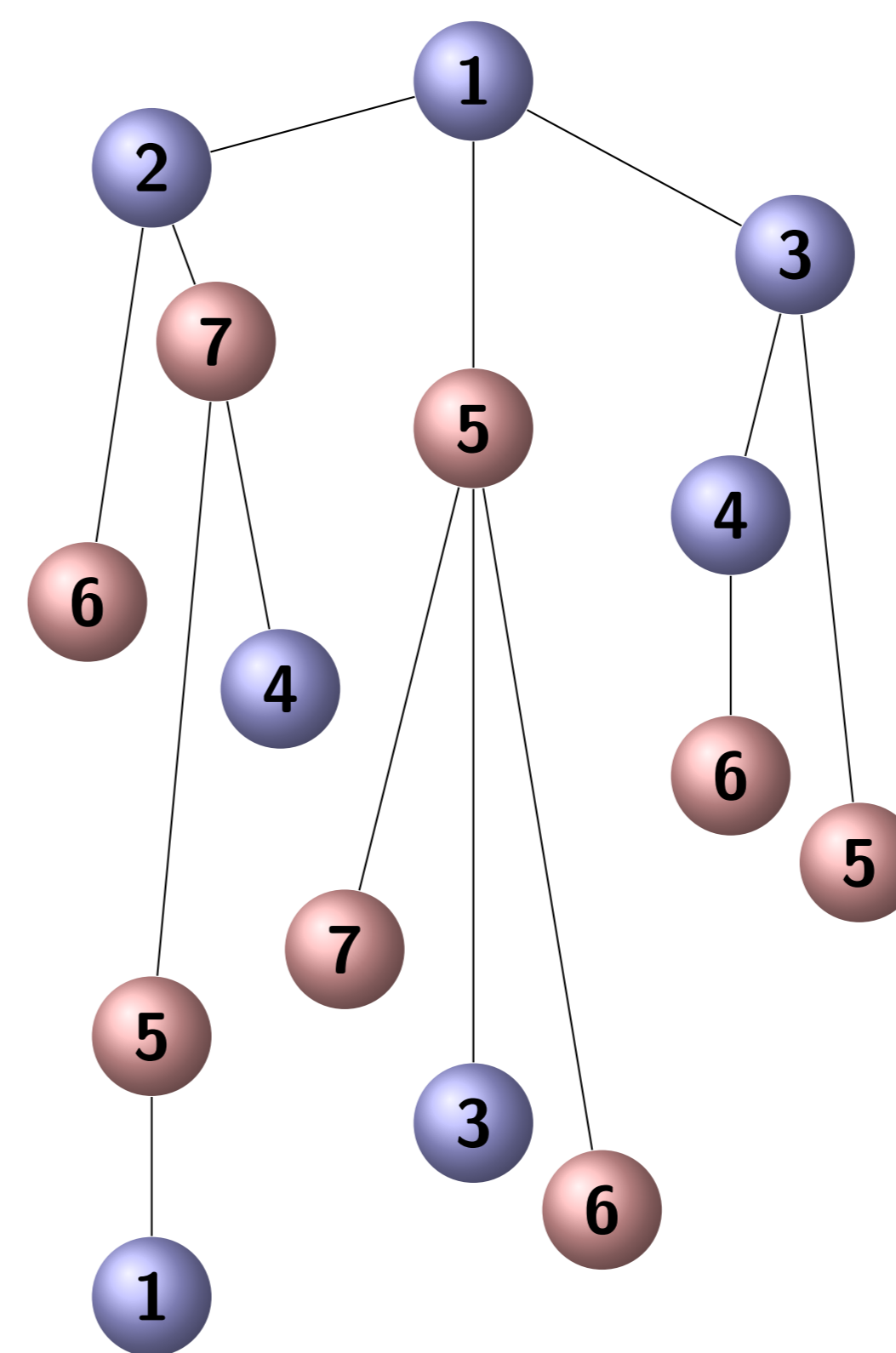
Vissza a gráfhoz!

- Amikor egy csúcs vizes lesz = meghal a családfában
- Osztódás, gyerekek születése = a belőle kifutó éleken elindul a víz
- A két folyam két ilyen családfának felel meg
- Összefolyás, csatlakozás = a két családfának közös csúcsa lesz.

Családfák beágyazása a gráfba

Hogyan feleltetjük meg a családfa csúcsainak a gráfbeli csúcsokat?

Trükk: a véletlen gráf modellben leírt élek létrejöttét és a folyamatot egyszerre kezeljük:



A családfa felcímkézése

Mindenkinek, amikor megszületik, a megfelelő típusú címkék közül sorsolunk egyet úgy, hogy

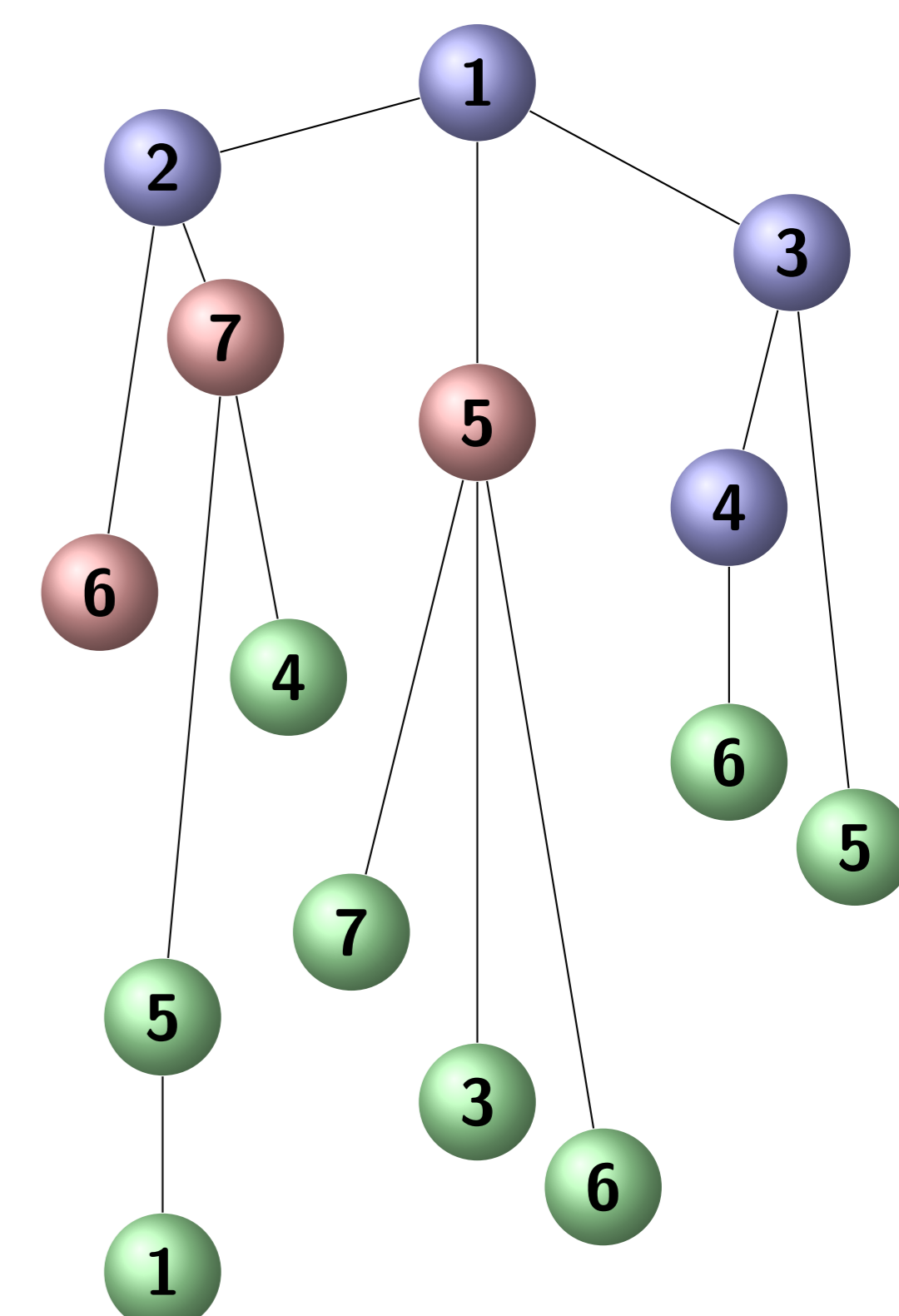
- szülővel nem lehet azonos címke, (**hurokélek elkerülése**)
- testvérek különböző címkét kapnak születéskor (**párhuzamos élek elkerülése**).
- Előfordulhat, hogy távoli rokonokra ugyanolyan címkét sorsolunk: ez a gráfban egy **körnek** felel meg:
- Többszörös címkék a fában:** Merre kell menni? Melyik a rövidebb út a kettő közül?

Ritkítás ~ Körök

- Gráfbeli kör: a rövidebb oldalon érdemes menni.
- Többszörös címke a családfában: csak a legkorábbi megjelenést tartjuk meg.
- Későbbi megjelenéseit töröljük, leszármazottaival együtt

Tétel A felcímkézett, ritkított családfában bármely csúcs távolsága a gyökértől (eloszlásban) megegyezik a legrövidebb út hosszával az eredeti gráfban. Továbbá, az adott csúcs generációja megegyezik a legrövidebb úton lévő élek számával a gráfban.

Az ábrákon az eredeti véletlen gráfon lévő 1-es csúcsból indított családfa (folyam) látható, ritkítás előtt illetve után.



Eredmények

Fő tétel a távolságra

H_n a legrövidebb úton lévő csúcsok száma, W_n a legrövidebb út hossza
 $\bar{\lambda}$ = szomszédok átlagos száma -1 , n a gráf csúcsainak száma

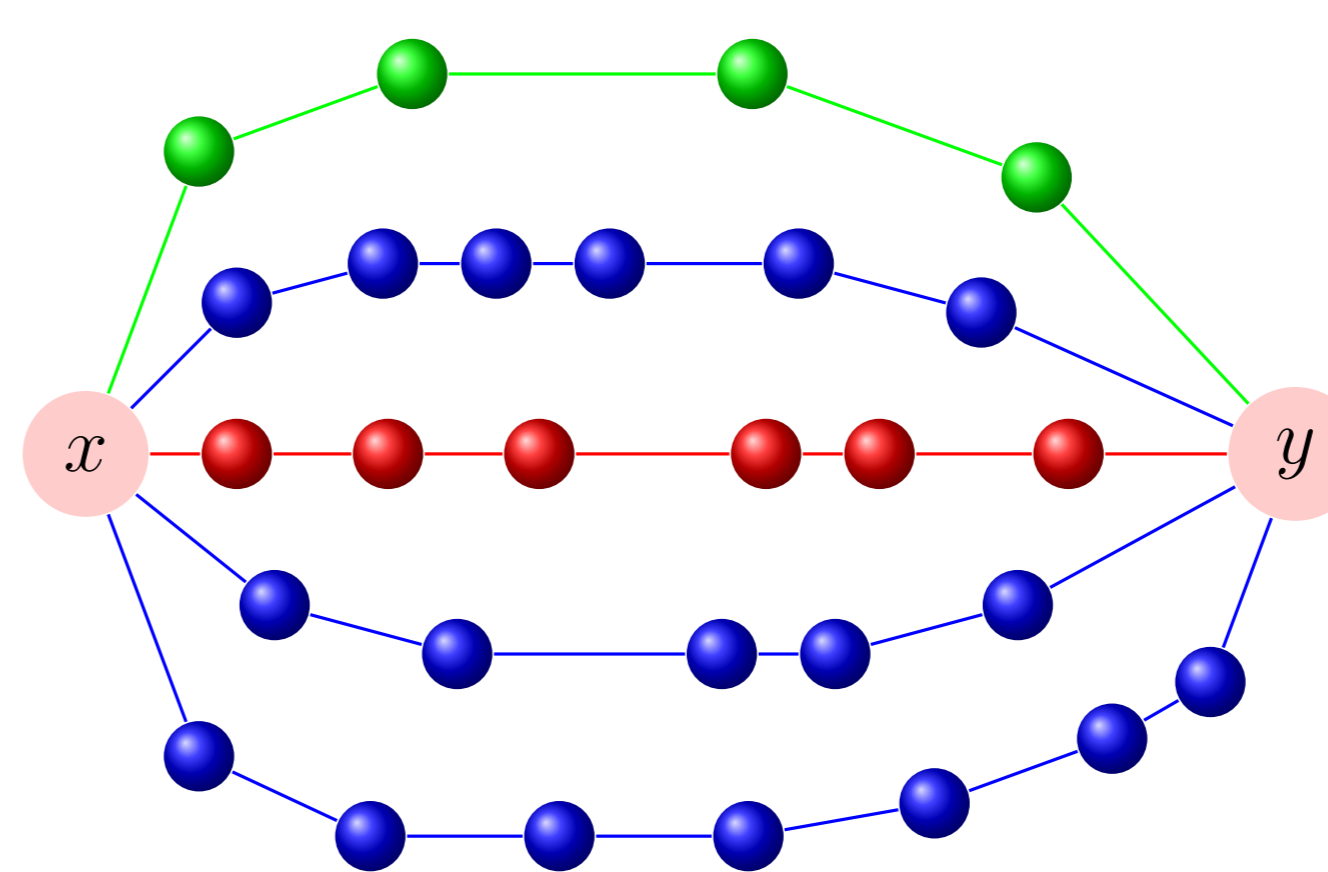
$$H_n = \frac{\bar{\lambda} + 1}{\bar{\lambda}} \cdot \log n + Z \cdot \sqrt{\frac{\bar{\lambda} + 1}{\bar{\lambda}} \log n}$$

$$W_n = \frac{1}{\bar{\lambda}} \cdot \log n + W$$

ahol Z és W véletlen konstansok, eloszlásuk meghatározható: Z standard normális, W a családfa folyamatból származó változó.

Interpretáció

Megleppő eredmény: a legrövidebb úton több falu van, mint a legkevesebb falut tartalmazó úton.



- legrövidebb élsúlyozatlan út
- legrövidebb élsúlyozott út
- egyéb utak

Készült a BME Nyílt Nap keretében rendezett BME Doktorandusz Konferencia alkalmára.

A kutatást az OTKA CNK 77778 és az NFÜ támogatta, aminek forrása a KTIA-tól származik.
2011. november 25.