·

æ

A3 6-7. GYAKORLAT (* feladatok nem kötelezőek)

1. Az 1,2,4,5,7 számkártyák mindegyikének felhasználásával hány különböző 5-jegyű szám készíthető?
2. A 0,2,4,5,7 számkártyák mindegyikének felhasználásával hány különböző 5-jegyű szám készíthető? Ezekből hány páros, és hány páratlan?
3. Az 1,1,4,4,4,5 számkártyák mindegyikének felhasználásával hány különböző 6-jegyű szám készíthető?
4. A KOMBINATORIKA szó betűinek összekeverésével hány különböző 13 betűs (értelmes vagy értelmetlen) szó készíthető?
5. Az 1,2,4,5,7 számkártyákból hány különböző
   a. olyan 3-jegyű szám készíthető, melyeknek számjegyei egymás közt is kölönböznek?
   b. 3-jegyű szám készíthető?
   c. 5-jegyű szám készíthető?
   d. 7-jegyű szám készíthető?
6. Hány különböző olyan rendszámtábla készíthető az abc 26 betűjének és a $0, 1, \dots, 9$ számjegyeknek tetszőleges felhasználásával, amelyben
   a. 3 betűt 3 számjegy követ?
   b. 2 betűt 4 számjegy követ?
   c. Melyik szisztémában van több lehetőség? Hányszor több?
7. Hányféleképpen tölthető ki egy totószelvény?
8. Egy 20-fős tankörben
   a. mindenki mindenkivel kezet fog. Hány kézfogás ez?
   b. tanulmányi, kulturális és sportfelelőst választanak (ezek különböző személyek). Hányféle választás lehetséges?
   b. 3 személyt delegálnak a hallgató önkormányzat gyűlésére. Hányféle választás lehetséges?
9. Hány olyan 3-jegyű szám van, melynek jegyei
   a. csökkenő sorrendben követik egymást?
   b. (*) növekvő sorrendben követik egymást?
10. Hányféleképpen tölthető ki egy lottőszelvény? (*) Adjon algoritmust a különböző számötösök felsorolására!
11. Hányféleképpen lyukasztható ki egy buszjegy, ha
    a. 3 lyukat ejt a lyukasztó?
    b. ha tetszőleges (min. 1 és max. 9 számú) lyukat ejt a lyukasztó?

12. Cukrászdában 10 különböző fajta torta van. Hányféleképpen választhatunk
    a. 3 szelet tortát különböző fajtákból?
    b. (*) 3 szelet tortát?
    c. (*) 20 szelet tortát?
13. Egy 20-fős tankör (10 fiú, 10 lány) kirándulni megy a János-hegyre. Hányféleképpen
    a. alakíthatnak párokat, mikor felszállnak a libegőre?
    b. alakíthatnak (fiú–lány) táncospárokat, ha a fenti étteremben mindenki táncol?
    c. alakíthatnak 4 fős csoportokat, ha 5 erdei asztalhoz leülnek ennivalójukat elfogyasztani?
    d. alakíthatnak 4 fős csoportokat, ha az 5 csoport különféle feladatköröket lát el (egyik rőzsét hord, a másik tüzet gyújt, a harmadik főz, stb.).
14. Hányféleképpen olvasható ki a BELFEGOR szó az alábbi elrendezésből, ha a bal felső sarokból a jobb alsó felé haladunk (jobbra vagy lefelé)?

B	E	L	F	E
E	L	F	E	G
L	F	E	G	O
F	E	G	O	R

15. Az előbbi feladat alapján: Pascal háromszög, binomiális együtthatók képzési szabálya. Binomiális tétel és az alábbi összefüggések kombinatorikus bizonyítása:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

$$0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} + \binom{m}{k-i}$$

16. Egy vetélkedőn 4 informatikus, 5 villamos-, 6 építő- és 7 gépészkaros hallgató vesz részt. Egyik feladat megoldásához hányféleképpen lehet közülük 5 személyt kiválasztani úgy, hogy mind a négy kar képviselve legyen közöttük?
17. (*) Egy DNS-részlet 20 hosszúságú, A,T,C,G jelekből álló sorozat. Hány különböző olyan sorozat létezik, amelyben a négyféle jel mindegyike szerepel legalább egyszer? (Ekvivalens feladat: 20 fős tankör minden tagja egy gombócot eszik A,T,C,G

fagyik közül. Hányféleképpen fagyizhatnak, ha mind a négy ízből legalább egy-valaki eszik?)

Megoldások:

1. Mivel mind az 5 kártyát fel akarjuk használni, ezért az első helyre 5 szám kerülhet, a második helyre már csak 4, és így tovább, az 5-jegyű szám legalsó helyiértékére már csak 1 kártya közül "választhatunk". Azaz:
$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$$
2. A 0-s kártya nem kerülhet a legmagasabb helyiértékre, így oda csak 4 szám közül választhatunk, a többi 4 helyiértékre kerülő számokat viszont ezután is 4! féleképpen tudjuk kiválasztani:
$$4 \cdot 4!$$
Páratlan: Vagy 5-össel, vagy 7-essel kell végződnie, mindkét esetben 3 * 3! féleképpen helyezhetjük el a többi 4-et, így a páratlanok száma:
$$2 \cdot 3 \cdot 3!$$
Páros: Komplementer eseménye a páratlan számoknak:
$$4 \cdot 4! - 2 \cdot 3 \cdot 3!$$
3. 6 különböző szám esetén az 1. feladat alapján 6! lenne, azonban a többször előforduló számokat(1-es, 4-es), amelyek n-szer fordulnak elő, n! féleképpen tudjuk úgy cserélgetni, hogy ugyanazt a számot kapjuk, azaz 2!-al illetve 3!-al le kell osztani:
$$\frac{6!}{2! \cdot 3!}$$
4. Az előző feladat analógiájára (K,O,I,A betűk kétszer-kétszer fordulnak elő):
$$\frac{13!}{2^4}$$

5.

a. 5 számjegyből választhatunk 3 helyre, egyik sem szerepelhet benne többször, ezért: $5 \cdot 4 \cdot 3$

b. Ha ismétlődhetnek a számok akkor mindhárom helyiértékre 5 számjegyből választhatunk: 5^3

c. A b feladat analógiájára: 5^5

d. Szintén a fentiek miatt: 5^7

6.

a. A 3 betűs helyre $26 \cdot 26 \cdot 26$ kombináció, a 3 számos helyre $10 \cdot 10 \cdot 10$ db különböző szám kerülhet: $26^3 \cdot 10^3$

b. Fentiek alapján: $26^2 \cdot 10^4$

c. Az első esetben több lehetőség van, egész pontosan a-ban 2.6-szor több, mint b-ben

7. A totószelvényen 13 esemény 3 féle kimenetelére tippelhetünk, azaz minden sort 3 féleképp tölthetünk ki: $\mathbf{3^{13}}$

8.

a. Mind a 20 ember 19 másikkal fog kezet, viszont $20 \cdot 19$ esetén minden kézfogást kétszer számolnánk, ezért még kell egy $\frac{1}{2}$ -es szorzó:

$$\frac{20 \cdot 19}{2}$$

b. Különböző személyek, így az 1. posztra még 20 emberből, a másodikra 19-ből az utolsóra pedig 18 személyből lehet választani:

$$20 \cdot 19 \cdot 18$$

c. 20 emberből 3-at kiválasztani definíció alapján $\binom{20}{3}$ -képpen lehet

9.

a. A 10 számjegyből 3-at kiválasztani $\binom{10}{3}$ módon tudok, ezeket a számharmasokat csökkenő sorba rendezni pedig hármasonként csak 1 féleképp lehet, így:

$$\binom{10}{3}$$

b. Az a feladathoz hasonlóan itt is 3 számot kell kiválasztanunk, azonban ebben a 0 nem szerepelhet, mivel növekvő sorrend esetén a legmagasabb helyiértéken kéne szerepelnie, 0-val viszont nem kezdődhet szám, így marad 9 számjegy:

$$\binom{9}{3}$$

10. A 90 számból 5-öt $\binom{\mathbf{90}}{\mathbf{5}}$ módon lehet kiválasztani.

11.

a. A 9 helyből 3 különbözőt a lyukasztó $\binom{\mathbf{9}}{\mathbf{3}}$ – **képpen** tud kilyukasztani

b. Ha k 1 és 9 közt változik akkor:

$$\sum_{k=1}^{9} \binom{9}{k} = 2^9 - 1$$

12.

a. 10 fajta tortából 3 különböző darabot $\binom{10}{3}$ – képpen lehet kiválasztani

b. 10 elem 3-ad osztályú ismétléses kombinációi:

$$\binom{10+3-1}{3} = \binom{12}{3}$$

c. 10 elem 20-ad osztályú ismétléses kombinációi:

$$\binom{10+20-1}{20} = \binom{29}{20}$$

13.

a. Mivel mindenki mindenkivel alakíthat part, ezért az első párt $\binom{20}{2}$ – féleképp választhatjuk ki, a másodikat $\binom{18}{2}$, stb. Így: $\binom{20}{2}\binom{18}{2}\ldots\binom{4}{2}$, amit még osztanunk kell 10!-al, ha a párok sorrendje nem számít.

b. Az első fiú még 10 lányból tud választani párt, a második 9-ből, stb. Ezért a lehetséges párok száma: 10!

c. Az 1. csoportot $\binom{20}{4}$– féleképp tudjuk kiválasztani, a másodikat $\binom{18}{4}$ módon, stb. Mivel a csoportok sorrendje nem számít, osztunk 5!-al:

$$\binom{20}{4}\cdot\binom{16}{4}\cdot\binom{12}{4}\cdot\binom{8}{4}\cdot\frac{1}{5!}$$

d. Hasonló, mint a c feladat, csak a sorrend is számít:

$$\binom{20}{4}\cdot\binom{16}{4}\cdot\binom{12}{4}\cdot\binom{8}{4}$$

14. 3 lefele lépést és 4 jobbra lépést tetszőleges sorrendben tehetünk meg, azaz az összesen 7 lépésből válasszuk ki, hogy melyik 3-nál lépünk lefele (vagy melyik 4-nél lépünk jobbra, ezek egyenértékűek). Ezt $\binom{7}{3}$ módon tehetjük meg.

16. 5 hely van, és mind a 4 kar képviselve kell legyen, így valamelyik karból 2 ember lesz. Ezek egymástól független lehetőségek, így külön-külön összeadódnak:

$$\binom{4}{2}\cdot 5\cdot 6\cdot 7+\binom{5}{2}\cdot 4\cdot 6\cdot 7+\binom{6}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot 7+\binom{7}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot 6$$

17. Összesen 4^{20} sorozat létezik amit az A,T,C,G betűkből 20 hosszan tudunk kitenni, ebből azonban le kell vonni azokat az eseteket amikor csak 4 betűt használtunk, ez $\binom{4}{1}\cdot 3^{20}$. Ekkor viszont levontuk a 2 betűs sorozatokat is, ezeket hozzá kell adnunk: $\binom{4}{2}\cdot 2^{20}$. Értelemszerűen ebben benne vannak az 1 betűből álló 20 hosszú sorozatok, ezeket ismét le kell vonni: $\binom{4}{3}\cdot 1^{20}$. Így a teljes lehetséges sorozatok száma:

$$4^{20}-\binom{4}{1}\cdot 3^{20}+\binom{4}{1}\cdot 2^{20}-\binom{4}{1}\cdot 1^{20}$$

További kombinatorika feladatok a 6-7. hétre

1. TÉTEL: (A leszámlálás alapelve:) Tegyük fel, hogy *r* kísérletet hajtunk végre, úgy, hogy az első kísérlet n_1 különböző eredménnyel végződhet és ezen n_1 eredmény mindegyikére a második kísérlet n_2 különböző eredménnyel végződhet és az első két kísérlet mindegyik lehetséges eredményére a harmadik kísérlet n_3 eredménnyel végződhet és így tovább, akkor az r kísérlet összesen $n_1 n_2 \cdots n_r$ eredménnyel végződhet.

1. Egy gyermekfaluban minden hónapban kiosztják a "Hónap anya-gyerek" címet. Hányféleképpen lehet ezt megtenni, ha a faluban 10 anya él, és mindegyik anyához 3 gyerek tartozik?
2. Egy gimnázium diák tanácsát 5 elsős, 6 másodikos, 7 harmadikos, és 4 negyedikes alkotja. Ebből a tanácsból albizottságot alakítanak, amelybe mindegyik csoportból egy-egy főt delegálnak. Hány albizottság alakítható ki?
3. Hány különböző 6 karakterű rendszám készíthető, ha az első három karaktert betűk, a második három karaktert számok alkotják?
4. Hány különböző függvény létezik, melyeknek értelmezési tartománya az $\{1, 2, \ldots, m\}$ halmaz és értékkészlete az $\{1, 2\}$ halmaznak részhalmaza.
5. 8 fiú és 6 lány vizsgázik matematikából. Eredményességük alapján rangsoroljuk őket. Nincs két diák, aki ugyanazt az eredményt érte volna el.

   (a) Hány különböző rangsor készíthető?

   (b) Ha a fiúk is kizárólag maguk között állítanak fel egy sorrendet és a lányok is kizárólag maguk között állítanak fel egy sorrendet, akkor az hányféleképpen tehető meg?
6. 12 könyvből 5 matematikával, 2 kémiával, 3 történelemmel, és 2 angol nyelvtannal foglalkozik. A 12 könyvet úgy szeretnénk egy könyvespolcon elhelyezni, hogy az azonos témájú könyvek egymásmellé kerüljenek. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?
7. Hányféleképpen rendezhetők sorba a következő betűk: B A B B A C?
8. Egy 4 fős bizottságot választanak 22 emberből. Hányféleképpen tehető ez meg?
9. 5 nőből és 9 férfiból olyan bizottságot akarnak létrehozni, amelyben 3 nő és 4 férfi van. Hány bizottság hozható létre, ha a 9 férfiból van kettő olyan aki nem hajlandó egy bizottságban dolgozni?

Megoldások:

1. Mivel minden anyához 3 gyerek tartozik, minden anyánál 3 lehetséges párosítás jön szóba. Mivel 10 anya van, ezért:

$$10 \cdot 3 = 30$$

2. Mindegyik évfolyamból 1 embert delegálnak, így mivel *n* elemből 1-et *n*-féleképp lehet kiválasztani:

$$5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 4$$

3. Az angol ABC betűit használva egy 26 elemű betűhalmaz, illetve egy 10 elemű számjegyhalmaz áll rendelkezésünkre. A 3 betű ill. a 3 szám helyére is Bármelyik betű ill. szám kerülhet, így:

$$26^3 \cdot 10^3$$

4. Bináris értékkészlettel rendelkező függvény értelmezési tartományának minden egyes eleme 2 értéket vehet fel. Mivel 1-től *m*-ig tart az értelmezési tartomány *m*-szer tudunk a 2 érték közül választani:

$$2^m$$

5.
   a) Az első helyre 14 diák kerülhet, a másodikra 13, és így a tovább, az utolsó helyezettett már csak 1 személyből „választhatjuk ki”:

   $$14!$$

   b) Ha a fiúk és a lányok külön-külön állítanak fel maguk közt sorrendet, akkor az előző analógiájára:

   $$8! \cdot 6!$$

6. Vegyük úgy, mint ha az azonos tematikájú könyvek össze lennének kötve 1-1 blokkba. Így 4 blokkunk van, amit értelmszerűen 4!-féleképp tudunk sorbarendezni. Viszont még az egyes tantárgyakon belüli *n* db könyvet is *n*!-képpen tudjuk sorbarendezni, ezért:

$$4! \cdot 5! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 2!$$

7. 6 különböző elemet 6! módon lehet sorbarendezni, mivel azonban az azonos betűk különböző sorrendje nem minősül különböző sorbarendezésnak, azok, faktoriálisával osztani kell:

$$\frac{6!}{2! \cdot 3!}$$

8. Definíció alapján n emberből k db-ot kiválasztani $\binom{n}{k}$ - féleképp lehet, így:

$$\binom{22}{4}$$

9. Az 5 nőből 3-at természetesen $\binom{5}{3}$ módon tudunk kiválasztani. A 9 férfiból 4-et $\binom{9}{4}$ - féleképp lehet kiválasztani, ebből viszont le kell vonni azon eseteket, mikor a két ominózus férfi együtt szerepelne, ekkor melléjük még 2 embert $\binom{7}{2}$ - képpen választhatunk. Így a végeredmény:

$$\binom{5}{3} \cdot \left(\binom{9}{4} - \binom{7}{2}\right)$$