Feladatok és megoldások a 13. hétre

Építőkari Matematika A3

1. Oldjuk meg a következő differenciálegyenlet-rendszert:

$$\begin{aligned} x' + 2y' - 3x + 4y &= 2\sin t, \\ 2x' + y' + 2x - y &= \cos t. \end{aligned} \tag{1}$$

2. Oldjuk meg a következő differenciálegyenlet-rendszert:

$$\begin{aligned} x' - 2x + y &= e^t, \\ y' - 3x + 2y &= t. \end{aligned}$$

3. Oldjuk meg a következő differenciálegyenlet-rendszert:

$$\begin{aligned} x' - 2x + 5y &= -\cos t, \\ y' - x + 2y &= \sin t. \end{aligned}$$

4. Oldjuk meg a következő differenciálegyenlet-rendszert:

$$\begin{aligned} x' - x - y &= e^{-2t}, \\ y' - 4x + 2y &= -2e^t. \end{aligned}$$

Eredmények

1.

$$\begin{aligned} 2(D-3)x + 2(D+2)y &= 2\sin t \\ 2(D+1)x + (D-1)y &= \cos t. \end{aligned}$$

Tehát az egyenletrendszer determinánsa:

$$\Delta = \begin{vmatrix} D-3 & 2(D+2) \\ 2(D+1) & D-1 \end{vmatrix} = D^2-4D+3-4(D^2+3D+2) = -3D^2-16D-5 \neq 0. \tag{2}$$

A $\Delta \neq 0$ kikötés mellett keresünk megoldást. A végén ellenőrizzük, hogy a kapott megoldásokra Δx ill. Δy nem azonosan 0 (de ez az alábbiakban felírt inhomogén lineáris egyenletekre kizárható).

Cramer-szabály alapján:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 2\sin t & 2(D+2) \\ \cos t & D-1 \end{vmatrix} \text{ és } \Delta y = \begin{vmatrix} D-3 & 2\sin t \\ 2(D+1) & \cos t \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Kiszámoljuk ezen két egyenlet jobb oldalain levő determinánsokat:

$$\begin{vmatrix} 2\sin t & 2(D+2) \\ \cos t & D-1 \end{vmatrix} = 2\cos t - 2\sin t + 2\sin t - 4\cos t = -2\cos t$$

és

$$\begin{vmatrix} D-3 & 2\sin t \\ 2(D+1) & \cos t \end{vmatrix} = -\sin t - 3\cos t - (4\cos t + 4\sin t) = -5\sin t - 7\cos t.$$

Felhasználva, hogy a (2) egyenletből $\Delta = -3D^2 - 16D - 5$ kapjuk, hogy a (3)-beli egyenletek:

$$\begin{aligned} -3x'' - 16x' - 5x &= -2\cos t, \\ -3y'' - 16y' - 5y &= -5\sin t - 7\cos t. \end{aligned} \tag{4}$$

Ezeket a már tanult módon megoldva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} x &= c_1 e^{-t/3} + c_2 e^{-5t} + \frac{1}{65}(8\sin t + \cos t), \\ y &= c_3 e^{-t/3} + c_4 e^{-5t} + \frac{1}{130}(61\sin t - 33\cos t) \end{aligned} \tag{5}$$

Helyettesítsük ezeket az eredeti (az (1) egyenlet rendszerbeli) második egyenletbe. Kapjuk, hogy:

$$\left(\underbrace{\frac{4}{3}c_1 - \frac{4}{3}c_3}_{0}\right) e^{-t/3} + (\underbrace{-8c_2 - 6c_4}_{0})e^{-5t} = 0.$$

Innen:

$$c_3 = c_1 \text{ és } c_4 = -\frac{4}{3}c_2.$$

Ezeket visszahelyettesítve (5)-be kapjuk, hogy az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{aligned} x &= c_1 e^{-t/3} + c_2 e^{-5t} + \frac{1}{65}(8\sin t + \cos t), \\ y &= c_1 e^{-t/3} - \frac{4}{3}c_2 e^{-5t} + \frac{1}{130}(61\sin t - 33\cos t). \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} x &= c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{3}{2}te^t + t, \\ y &= c_1 e^t + 3c_2 e^{-t} + \frac{3}{2}te^t - \frac{1}{2}e^t + 2t - 1. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
x &= c_1 \cos t + c_2 \sin t + 2t \cos t - t \sin t, \\
y &= \frac{2c_1 - c_2 - 3}{5} \cos t + \frac{c_1 + 2c_2 + 1}{5} \sin t + t \cos t.
\end{aligned}$$

Vagy más alakban:

$$\begin{aligned}
x &= 5c_1 \cos t + 5c_2 \sin t + 2t \cos t - t \sin t - \cos t, \\
y &= c_1(2 \cos t + \sin t) + c_2(-\cos t + 2 \sin t) + t \cos t - \cos t.
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
x &= c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} + \frac{1}{2} e^{t}, \\
y &= -4c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} - e^{-2t}.
\end{aligned}$$

1. feladat. Oldja meg az $x' + x + y' + y = 0,\ x + y' = 0, x(0) = 5, y(0) = 1$ kezdeti érték problémát!

Megoldás. A d.e.r. differenciál operátorral felírva:

$$\begin{array}{ccccc} (D+1)x & + & (D+1)y & = & 0 \\ x & + & Dy & = & 0 \end{array}$$

Innen

$$\Delta = \begin{vmatrix} D+1 & D+1 \\ 1 & D \end{vmatrix} = D^2 - 1 \neq 0,$$

s így

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 0 & D+1 \\ 0 & D \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta y = \begin{vmatrix} D+1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

azaz

$$x'' - x = 0,\ y'' - y = 0.$$

Ezek megoldásai:

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{-t},\ y = c_3 e^t + c_4 e^{-t}.$$

Ezeket behelyettesítve a d.e.r. második egyenletébe adódik, hogy $c_3 = -c_1, c_4 = c_2$. Tehát a d.e.r. általános megoldása

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{-t},\ y = -c_1 e^t + c_2 e^{-t}.$$

Innen a kezdeti érték probléma megoldása:

$$x = 2e^t + 3e^{-t},\ y = -2e^t + 3e^{-t}.$$

2. feladat. Oldja meg a $2x' = y' + y,\ y' = 2x' + 2x,\ x(0) = 1,\ y(0) = -2$ kezdetiérték-problémát!

Megoldás. A d.e.r. differenciál operátorral felírva:

$$\begin{array}{lclcl} 2Dx & - & (D+1)y & = & 0 \\ 2(D+1)x & - & Dy & = & 0 \end{array}$$

Innen

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2D & -(D+1) \\ 2(D+1) & -D \end{vmatrix} = 4D + 2 \neq 0,$$

s így

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 0 & -(D+1) \\ 0 & -D \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta y = \begin{vmatrix} 2D & 0 \\ 2(D+1) & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

azaz

$$4x' + 2x = 0,\ 4y' + 2y = 0.$$

Ezek megoldásai:

$$x = c_1 e^{-t/2},\ y = c_2 e^{-t/2}.$$

Ezeket behelyettesítve a d.e.r. második egyenletébe adódik, hogy $c_2 = -2c_1$. Tehát a d.e.r. általános megoldása

$$x = c_1 e^{-t/2},\ y = -2c_1 e^{-t/2},$$

s így a k.é.p. megoldása:

$$x = e^{-t/2},\ y = -2e^{-t/2}.$$

3. feladat. Oldja meg az $x' = y + e^{2t},\ y' = x$ differenciálegyenlet-rendszert!

Megoldás. A d.e.r. - t differenciál operátorral felírva:

$$\begin{array}{ccccc} Dx & - & y & = & e^{2t} \\ x & - & Dy & = & 0 \end{array}$$

Innen

$$\Delta = \begin{vmatrix} D & -1 \\ 1 & -D \end{vmatrix} = -D^2 + 1 \neq 0,$$

s így

$$\Delta x = \begin{vmatrix} e^{2t} & -1 \\ 0 & -D \end{vmatrix} = -2e^{2t},\quad \Delta y = \begin{vmatrix} D & e^{2t} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -e^{2t},$$

azaz

$$x'' - x = 2e^{2t},\ y'' - y = e^{2t}.$$

Ezek megoldásai próbafüggvény alkalmazásával (rezonancia nem lép fel):

$$x = \frac{2}{3}e^{2t} + c_1 e^t + c_2 e^{-t},\ y = \frac{1}{3}e^{2t} + c_3 e^t + c_4 e^{-t}.$$

Ezeket behelyettesítve a d.e.r. második egyenletébe adódik, hogy $c_3 = c_1, c_4 = -c_2$. Tehát a d.e.r. általános megoldása

$$x = \frac{2}{3}e^{2t} + c_1 e^t + c_2 e^{-t},\ y = \frac{1}{3}e^{2t} + c_1 e^t - c_2 e^{-t}.$$

4. feladat. Oldja meg az $x' + x + y' + 2y = e^t,\ x' + 2x + y' + 4y = 0$ differenciálegyenlet-rendszert!

Megoldás. A d.e.r. differenciál operátorral felírva:

$$\begin{array}{ccccc} (D+1)x & + & (D+2)y & = & e^t \\ (D+2)x & + & (D+4)y & = & 0 \end{array}$$

Innen

$$\Delta = \begin{vmatrix} D+1 & D+2 \\ D+2 & D+4 \end{vmatrix} = D \neq 0,$$

s így

$$\Delta x = \begin{vmatrix} e^t & D+2 \\ 0 & D+4 \end{vmatrix} = 5e^t, \quad \Delta y = \begin{vmatrix} D+1 & e^t \\ D+2 & 0 \end{vmatrix} = -3e^t,$$

azaz

$$x' = 5e^t, \; y' = -3e^t.$$

Ezek megoldásai:

$$x = 5e^t + c_1, \; y = -3e^t + c_2.$$

Ezeket behelyettesítve a d.e.r. első egyenletébe adódik, hogy $c_1 + 2c_2 = 0$. Tehát a d.e.r. általános megoldása

$$x = 5e^t + c_1, \; y = -3e^t - \frac{c_1}{2}.$$