Építőkari Matematika A3

Feladatok és megoldások a 14. hétre

1. Ha $\mathbb{E}(X) = 1$ és $\mathbb{D}^2(X) = 5$, határozzuk meg

   (a) $\mathbb{E}[(2 + X)^2]$,

   (b) $\mathbb{D}^2(4 + 3X)$

   értékét.

2. Legyenek X_1, X_2, ... független azonos eloszlású valószínűségi változók μ várható értékkel és σ szórással. Határozzuk meg
$$Y_n := \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma}$$
   várható értékét és szórását.

3. Egy kisváros négyzet alakú, mely négyzet oldalai 3 kilométer hosszúak. A város (0, 0) középpontjában van a kórház, és a város utcái négyzetháló-szerűek. Ezért ha a város (x, y) pontján történik egy baleset, a mentőnek $|x| + |y|$ távolságot kell megtennie a balesettől a kórházig. Ha egy baleset a városon belül egyenletes eloszlású helyen következik be, számoljuk ki a betegszállítás várható hosszát.

4. Legyenek X és Y független azonos eloszlású valószínűségi változók μ várható értékkel és σ szórással. Számoljuk ki $\mathbb{E}[(X - Y)^2]$ értékét.

5. A zsebemben levő 1, 2, 5, 10, 20, 50 és 100 forintos érmék száma független Poisson(λ) eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg aprópénzem értékének várható értékét és szórását.

6. Legyenek X és Y független valószínűségi változók közös μ várható értékkel, de különböző σ_X és σ_Y szórásokkal. μ értékét nem tudjuk, és egy mintavátel alapján az X és Y súlyozott átlagával szeretnénk becsülni. Azaz: μ értékére a $\lambda X + (1 - \lambda)Y$ becslést fogjuk adni, valamilyen λ paraméterrel. Hogyan válasszuk λ-t, hogy a becslésünk szórása minimális legyen? Miért érdemes ezt a λ-t használnunk?

7. Számítsuk ki az n-edrendű p paraméterű binomiális eloszlás standardizáltját $n \to \infty$ esetén $p = 0.4$, $p = 0.02$ illetve $p = 0.96$ esetekben.

8. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 6 000 kockadobás során előforduló hatosok száma 970 és 1050 közé esik?

9. Egy gyár adott típusú termékei egymástól függetlenül elfogadható minőségűek 0.95 valószínűséggel. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy a következő 150 termékből legfeljebb 10 nem lesz elfogadható.

10. Egy gyár két fajta érmét gyárt: egy igazságosat, és egy hamisat ami 55% eséllyel mutat fejet. Van egy ilyen érménk, de nem tudjuk igazságos-e vagy pedig hamis. Ennek eldöntésére a következő statisztikai tesztet hajtjuk végre: feldobjuk az érmét 1000-szer, ha legalább 525-ször fejet mutat, akkor hamisnak nyilvánítjuk, ha 525-nél kevesebb fej lesz a dobások között, akkor az érmét igazságosnak tekintjük. Mi a valószínűsége, hogy a tesztünk téved abban az esetben, ha az érme igazságos volt? És ha hamis volt?

11. Határozzuk meg azt a k egész számot, amelyre igaz, hogy annak a valószínűsége, hogy 400 érmedobás során a fejek száma 195 és k közé esik, kb. 0.5.

12. Hányszor kell egy érmével dobnunk ahhoz, hogy 0.95-nél nagyobb valószínűséggel a fej eredmények száma a dobások számának 47%-a és 53%-a közé essen?

13. Egy szabályos érmét 40-szer feldobunk, és X-szel jelöljük a kapott fejek számát. Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy $X = 20$

    - a binomiális eloszlás segítségével,
    - a DeMoivre-Laplace tételt használva. Ez utóbbihoz segítség: $\mathbb{P}\{X = 20\} = \mathbb{P}\{19.5 \le X < 20.5\}$, ami persze nem számít amíg X-et binomiálisnak (azaz egész értékűnek) tekintjük, de fontos lesz a DeMoivre-Laplace tétel alkalmazásával.

14. Mennyi a valószínűsége annak, hogy 50 darab független és azonos eloszlású valószínűségi változó összege a [0, 30] intervallumba esik, ha egy ilyen változó eloszlása a [0, 1] intervallumon

    (a) egyenletes;

    (b) $f(x) = 2x$ sűrűségfüggvény szerint alakul?

15. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy 10 000 kockadobás összege 34 800 és 35 200 közé esik.

16. Egy kockát folyamatosan feldobunk addig, amíg a dobások összege meghaladja a 300-at. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy legalább 80 dobásra van ehhez szükség.

17. Adott 100 égőnk, melyek élettartama egymástól független exponenciális eloszlású, 5 óra várható értékkel. Tegyük fel, hogy az égőket egymás után használjuk, azonnal kicserélve azt, amelyik kiégett. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy 525 óra után még van működő égőnk.

18. Az 17. feladatban most tegyük fel, hogy minden égő kicserélése független, a (0, 0.5) intervallumon egyenletes eloszlású ideig tart. Becsüljük meg most annak valószínűségét, hogy 550 óra elteltével már az összes égő kiégett.

Eredmények

1.(a) $\mathbb{E}[(2+X)^2] = \mathbb{E}[4+4X+X^2] = 4+4\mathbb{E}(X)+\mathbb{D}^2(X)+[\mathbb{E}(X)]^2 = 4+4\cdot 1+5+1^2 = 14.$

(b) $\mathbb{D}^2(4+3X) = 3^2\cdot\mathbb{D}^2(X) = 3^2\cdot 5 = 45.$

2.

$$\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}\Big(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n-n\mu}{\sqrt{n}\cdot\sigma}\Big) = \frac{\mathbb{E}(X_1)+\mathbb{E}(X_2)+\cdots+\mathbb{E}(X_n)-n\mu}{\sqrt{n}\cdot\sigma} = 0.$$

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^2(Y_n) = \mathbb{D}^2\Big(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n-n\mu}{\sqrt{n}\cdot\sigma}\Big) &= \frac{1}{n\sigma^2}\cdot\mathbb{D}^2(X_1+X_2+\cdots+X_n-n\mu)\\ &= \frac{1}{n\sigma^2}\cdot[\mathbb{D}^2(X_1)+\mathbb{D}^2(X_2)+\cdots+\mathbb{D}^2(X_n)] = 1.\end{aligned}$$

3. Feltehető, hogy a baleset helyszínének X és Y koordinátái egymástól független, egyeletes eloszlásúak a $(-1.5,\ 1.5)$ intervallumon. Ezért a betegszállítás várható hossza

$$\mathbb{E}(|X|+|Y|) = \mathbb{E}(|X|)+\mathbb{E}(|Y|) = 2\cdot\int_{-1.5}^{1.5}|x|\cdot\frac{1}{3}\,\mathrm{d}x = 4\cdot\frac{x^2}{6}\Big|_0^{1.5} = 1.5\text{km}.$$

4. A $Z := X-Y$ változó várható értéke nulla, ezért

$$\mathbb{E}[(X-Y)^2] = \mathbb{E}[(Z^2)] = \mathbb{D}^2(Z) = \mathbb{D}^2(X-Y) = \mathbb{D}^2(X)+\mathbb{D}^2(-Y) = \mathbb{D}^2(X)+\mathbb{D}^2(Y) = 2\sigma^2.$$

5. Legyen X_i az i forintos érmék száma a zsebemben, és Y az érmék összértéke. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(1\cdot X_1+2\cdot X_2+5\cdot X_5+10\cdot X_{10}+20\cdot X_{20}+50\cdot X_{50}+100\cdot X_{100})\\ &= (1+2+5+10+20+50+100)\cdot\lambda = 188\lambda,\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^2(Y) &= \mathbb{D}^2(1\cdot X_1+2\cdot X_2+5\cdot X_5+10\cdot X_{10}+20\cdot X_{20}+50\cdot X_{50}+100\cdot X_{100})\\ &= (1^2+2^2+5^2+10^2+20^2+50^2+100^2)\cdot\lambda = 13030\lambda,\end{aligned}$$

a szórás tehát közelítőleg $114\sqrt{\lambda}$.

6. Nyilvánvaló, hogy $Z = \lambda X+(1-\lambda)Y$ becslésünk várható értéke minden λ-ra μ lesz. λ választása a szórásnégyzetet fogja befolyásolni:

$$\mathbb{D}^2(Z) = \mathbb{D}^2(\lambda X+(1-\lambda)Y) = \lambda^2\cdot\sigma_X^2+(1-\lambda)^2\cdot\sigma_Y^2.$$

Ez a kifejezés λ-nak másodfokú polinomja, melyben λ^2 együtthatója pozitív. Ezért a minimum ott éretik el, ahol a $2(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)\lambda-2\sigma_Y^2$ derivált értéke nulla, azaz $\lambda = \sigma_Y^2/[\sigma_X^2+\sigma_Y^2]$ esetén. Ez a kombináció a szórásnégyzetekkel fordított arányú súlyt ad a változókra, és ennek a lineáris kombinációknak lesz legkisebb a szórása, azaz ez adja a legmegbízhatóbb becslést a várható értékre.

7. Az eloszlásfüggvényt DeMoivre-Laplace tétellel közelítve

$$\begin{aligned}F(x) = \mathbb{P}\{X\le x\} = \mathbb{P}\Big\{\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le\frac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}}\Big\} &\simeq \Phi\Big(\frac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}}\Big)\\ = \Phi\Big(\frac{x-0.4n}{\sqrt{0.24n}}\Big), &\qquad \text{ha } p=0.4,\\ = \Phi\Big(\frac{x-0.02n}{\sqrt{0.0196n}}\Big), &\qquad \text{ha } p=0.02,\\ = \Phi\Big(\frac{x-0.96n}{\sqrt{0.0384n}}\Big), &\qquad \text{ha } p=0.96.\end{aligned}$$

8. A hatosok X száma binomiális, $n = 6\,000$ és $p = 1/6$ paraméterekkel. DeMoivre-Laplace tétellel

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{970 \le X \le 1050\} &= \mathbb{P}\left\{\frac{970 - 6\,000\cdot 1/6}{\sqrt{6\,000\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}} \le \frac{X - 6\,000\cdot 1/6}{\sqrt{6\,000\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}} \le \frac{1050 - 6\,000\cdot 1/6}{\sqrt{6\,000\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}}\right\}\\
&\simeq \mathbb{P}\left\{-1.04 \le \frac{X - 12\,000\cdot 1/6}{\sqrt{12\,000\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}} \le 1.73\right\} \simeq \Phi(1.73) - \Phi(-1.04)\\
&= \Phi(1.73) + \Phi(1.04) - 1 \simeq 0.9582 + 0.8508 - 1 = 0.809.
\end{aligned}$$

9. Az elfogadható termékek X száma binomiális $n = 150$ és $p = 0.95$ paraméterekkel. A keresett valószínűség

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X \ge 139\} = \mathbb{P}\Big\{\frac{X - 150\cdot 0.95}{\sqrt{150\cdot 0.95\cdot 0.05}} \ge \frac{139 - 150\cdot 0.95}{\sqrt{150\cdot 0.95\cdot 0.05}}\Big\} &\simeq \mathbb{P}\Big\{\frac{X - 150\cdot 0.95}{\sqrt{150\cdot 0.95\cdot 0.05}} \ge -1.31\Big\}\\
&\simeq 1 - \Phi(-1.31) = \Phi(1.31) \simeq 0.9049.
\end{aligned}$$

10. Igazságos érme esetén a fejek száma binomiális, $n = 1000$ és $p = 1/2$ paraméterekkel. Tesztünk téved, ha a fejek X száma 525-nél nagyobb-egyenlő. Ennek valószínűsége

$$\mathbb{P}\{X \ge 525\} = \mathbb{P}\left\{\frac{X - 1000\cdot 1/2}{\sqrt{1000\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}} \ge \frac{525 - 1000\cdot 1/2}{\sqrt{1000\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\right\} \simeq 1 - \Phi(1.58) \simeq 0.057.$$

Hamis érme esetén a fejek száma binomiális, $n = 1000$ és $p = 0.55$ paraméterekkel. Tesztünk téved, ha a fejek X száma 525-nél kisebb. Ennek valószínűsége

$$\mathbb{P}\{X < 525\} = \mathbb{P}\Big\{\frac{X - 1000\cdot 0.55}{\sqrt{1000\cdot 0.55\cdot 0.45}} < \frac{525 - 1000\cdot 0.55}{\sqrt{1000\cdot 0.55\cdot 0.45}}\Big\} \simeq \Phi(-1.59) = 1 - \Phi(1.59) \simeq 0.056.$$

11. 400 érmedobás során a fejek X száma binomiális(400, 1/2) eloszlású. Annak valószínűsége, hogy X 195 és k közé esik,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{195 \le X \le k\} &= \mathbb{P}\left\{\frac{195 - 400\cdot 1/2}{\sqrt{400\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}} \le \frac{X - 400\cdot 1/2}{\sqrt{400\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}} \le \frac{k - 400\cdot 1/2}{\sqrt{400\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\right\}\\
&\simeq \Phi\Big(\frac{k-200}{10}\Big) - \Phi(-0.5) = \Phi\Big(\frac{k-200}{10}\Big) + \Phi(0.5) - 1 = 0.5,
\end{aligned}$$

amiből $\Phi\Big(\frac{k-200}{10}\Big) = 1.5 - \Phi(0.5) \simeq 0.8085$. Az eloszlástáblázatot visszafelé használva kapjuk, hogy $\frac{k-200}{10} \simeq 0.87$, azaz $k \simeq 209$.

12. Ha n-szer dobunk, akkor a fejek X száma binomiális(n, 0.5) eloszlású. A feladat szerint

$$\begin{aligned}
0.95 \le \mathbb{P}\{0.47n \le X \le 0.53n\} &= \mathbb{P}\Big\{\frac{0.47n - 0.5n}{\sqrt{n\cdot 0.5\cdot 0.5}} \le \frac{X - 0.5n}{\sqrt{n\cdot 0.5\cdot 0.5}} \le \frac{0.53n - 0.5n}{\sqrt{n\cdot 0.5\cdot 0.5}}\Big\}\\
= \mathbb{P}\Big\{-0.06\sqrt{n} \le \frac{X - 0.5n}{\sqrt{n\cdot 0.5\cdot 0.5}} \le 0.06\sqrt{n}\Big\} &= \Phi(0.06\sqrt{n}) - \Phi(-0.06\sqrt{n}) = 2\Phi(0.06\sqrt{n}) - 1.
\end{aligned}$$

Ebből $\Phi(0.06\sqrt{n}) \ge 0.975$, ezért $0.06\sqrt{n} \ge 1.96$, avagy $n \ge 1067.11$, tehát 1068 dobás szükséges.

13. A keresett valószínűség pontos értéke

$$\mathbb{P}\{X=20\} = \binom{40}{20}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{20} \simeq 0.1254.$$

DeMoivre-Laplace tétellel

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X=20\} = \mathbb{P}\{19.5 \le X < 20.5\} &= \mathbb{P}\left\{\frac{19.5-40\cdot 1/2}{\sqrt{40\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}} \le \frac{X-40\cdot 1/2}{\sqrt{40\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}} \le \frac{20.5-40\cdot 1/2}{\sqrt{40\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\right\}\\ &\simeq \Phi(0.16)-\Phi(-0.16) = 2\Phi(0.16)-1 \simeq 0.1272.\end{aligned}$$

Megjegyzés: a k egész szám $(k-0.5,\ k+0.5)$ intervallummal való helyettesítése az eddigi feladatoknál nem volt lényegbe vágó, de ott is pontosít egy picit a DeMoivre-Laplace tétel alkalmazásán. Ennél a feladatnál azonban ez a trükk a megoldás lényege.

14.(a) Az egyenletes eloszlású változó várható értéke 0.5, és szórása $\sqrt{1/12}$. Ha S_{50} jelöli az 50 darab független verzió összegét, akkor a centrális határeloszlás tétel szerint

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{S_{50}\le 30\} &= \mathbb{P}\left\{\frac{S_{50}-50\cdot 0.5}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{1/12}} \le \frac{30-50\cdot 0.5}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{1/12}}\right\}\\ &\simeq \mathbb{P}\left\{\frac{S_{50}-50\cdot 0.5}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{1/12}} \le 2.45\right\} \simeq \Phi(2.45)\simeq 0.9929.\end{aligned}$$

(b) Ebben az esetben az X valószínűségi változó várható értéke és második momentuma

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x\cdot 2x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}, \qquad \mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2\cdot 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$

szórása tehát $\mathbb{D}(X)=\sqrt{\mathbb{E}(X^2)-[\mathbb{E}(X)]^2}=\sqrt{1/18}$. A fenti számolás most így alakul:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{S_{50}\le 30\} &= \mathbb{P}\left\{\frac{S_{50}-50\cdot 2/3}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{1/18}} \le \frac{30-50\cdot 2/3}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{1/18}}\right\}\\ &\simeq \mathbb{P}\left\{\frac{S_{50}-50\cdot 2/3}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{1/18}} \le -2\right\} \simeq \Phi(-2) = 1-\Phi(2)\simeq 0.0228.\end{aligned}$$

15. Legyen X egy kockadobás eredménye. Ekkor

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{6} i\cdot\frac{1}{6} = \frac{7}{2}, \qquad \mathbb{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{6} i^2\cdot\frac{1}{6} = \frac{91}{6},$$

amiből $\mathbb{D}^2(X) = 91/6-49/4 = 35/12$. Jelöljük S-sel a 10 000 dobás összegét, ekkor

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{34\,800\le S\le 35\,200\} &= \mathbb{P}\left\{\frac{34\,800-10\,000\cdot 7/2}{\sqrt{10\,000\cdot 35/12}} \le \frac{S-10\,000\cdot 7/2}{\sqrt{10\,000\cdot 35/12}} \le \frac{35\,200-10\,000\cdot 7/2}{\sqrt{10\,000\cdot 35/12}}\right\}\\ &\simeq \mathbb{P}\left\{-1.17 \le \frac{S-10\,000\cdot 7/2}{\sqrt{10\,000\cdot 35/12}} \le 1.17\right\}\\ &\simeq \Phi(1.17)-\Phi(-1.17) = 2\Phi(1.17)-1\simeq 0.758.\end{aligned}$$

16. Legalább 80 dobásra van szükség akkor és csak akkor, ha az első 79 dobás összege nem haladja meg a 300-at. A fenti várható értékkel és szórással

$$\mathbb{P}\{S_{79} \le 300\} = \mathbb{P}\Big\{\frac{S_{79} - 79 \cdot 7/2}{\sqrt{79 \cdot 35/12}} \le \frac{300 - 79 \cdot 7/2}{\sqrt{79 \cdot 35/12}}\Big\} \simeq \Phi(1.55) \simeq 0.9394$$

17. Akkor és csak akkor van 525 óra után működő égőnk, ha a 100 égő S_{100} együttes élettartama nagyobb 525-nél. Mivel egy égő várható élettartama és szórása egyaránt 5 óra (exponenciális eloszlás esetén e kettő megegyezik), ennek valószínűsége

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{S_{100} > 525\} = \mathbb{P}\Big\{\frac{S_{100} - 100 \cdot 5}{\sqrt{100} \cdot 5} > \frac{525 - 100 \cdot 5}{\sqrt{100} \cdot 5}\Big\} &= \mathbb{P}\Big\{\frac{S_{100} - 100 \cdot 5}{\sqrt{100} \cdot 5} > 0.5\Big\}\\ &\simeq 1 - \Phi(0.5) \simeq 0.3085.\end{aligned}$$

18 Minimális hibát követünk el, ha a legutolsó égő kiégése után is beszámítunk egy cserélési időt az összes égő üzemidejébe. Ekkor ha X_i az i-dik égő üzemideje a fenti exponenciális(1/5) eloszlással, és Y_i a kicserélésének ideje, akkor 100 darab független $Z_i = X_i + Y_i$ valószínűségi változó összegével kell számolnunk. Bármelyik ilyen változóra

$$\mathbb{E}(Z_i) = \mathbb{E}(X_i) + \mathbb{E}(Y_i) = 5 + 0.25 = 5.25, \qquad \mathbb{D}^2(Z_i) = \mathbb{D}^2(X_i) + \mathbb{D}^2(Y_i) = 25 + 0.5^2/12 \simeq 25.02.$$

Az összes égő kiégett, ha a Z_i-k S_{100} összege kisebb 550-nél, melynek valószínűsége

$$\mathbb{P}\{S_{100} < 550\} = \mathbb{P}\Big\{\frac{S_{100} - 100 \cdot 5.25}{\sqrt{100 \cdot 25.02}} < \frac{550 - 100 \cdot 5.25}{\sqrt{100 \cdot 25.02}}\Big\} \simeq \Phi(0.5) \simeq 0.6915.$$

Megjegyezzük, hogy a centrális határeloszlás tétel közvetlenül is alkalmazható lenne a 100 darab X_i és 99 darab Y_i S összegére. Ekkor S várható értéke $100 \cdot 5 + 99 \cdot 0.25 = 524.75$, és szórásnégyzete $\mathbb{D}^2(S) = 100 \cdot 25 + 99 \cdot 0.5^2/12 \simeq 2502.06$. Ezekkel az adatokkal a centrális határeloszlás tétel a következőképpen néz ki:

$$\mathbb{P}\{S < 550\} = \mathbb{P}\Big\{\frac{S - 524.75}{\sqrt{2502.06}} < \frac{550 - 524.75}{\sqrt{2502.06}}\Big\} \simeq \Phi(0.5048) \simeq 0.6915.$$

Az általunk használt eloszlástáblázat pontossága nem jeleníti meg a két Φ-érték közötti különbséget.

14. gyakorlat anyagához további példák nagy számok erős törvénye és a CHT alkalmazására

1. Integrálás Monte Carlo módszerrel

$$\int_0^1 \underbrace{e^{\sin(x^3+5x+1)}}_{\mathbf{t(x)}}\, dx = ?$$

Legyen X egy (0,1) intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & ha\ x \in (0,1) \\ 0, & különben \end{cases}$$

Ekkor Y=t(x) várható értéke

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} t(x) \cdot f(x)\, dx = \int_0^1 t(x)\, dx$$

azaz a fenti integrál.

A nagy számok erős törvénye értelmében, ha $X_1, \dots, X_n$ független $\varepsilon(0,1)$ változók és $Y_i = t(X_i)$, $1 \leq i \leq n$, akkor Y_i - k is függetlenek és

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \longrightarrow E(Y) \quad 1\ valószínűsségel, ha\ n \to \infty$$

Így Y_i - k számtani közepe elég nagy n – re elég jó közelítést ad a fenti integrálra.

2. Ruhatár fogasok

Egy 1000 férőhelyes színház bal és jobb bejáratához véletlenszerűen érkeznek a vendégek, tegyük fel, hogy egymástól függetlenül $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ valószínűséggel. A bal és jobboldali bejáratnál is van 1-1 ruhatár. Hány fogast rakjanak a ruhatárba, ha azt szeretnék, hogy a téli teltházas estén is 1% legyen annak a valószínűsége, hogy valaki nem tudja betenni abba a ruhatárba a kabátját amelyik bejáraton érkezik?

X : bal oldali ruhatárhoz érkező vendégek száma

Y: jobb oldali ruhatárhoz érkező vendégek száma = 1000 – X

Tekintsük az X valószínűségi változót. Ezt egy ezredrendű, ½ valószínűségű binomiális eloszlásnak tekinthetjük: $\sim B_{1000}(\frac{1}{2})$,

melynek várható értéke:

$\boldsymbol{E(X)} = n \cdot p = \mathbf{500}$

szórása pedig:

$\boldsymbol{D(X)} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \mathbf{5} \cdot \sqrt{\mathbf{10}}$

Jelöljük f - el a fogasok számát. Ekkor:

$$P(X > f\ vagy\ 1000 - X > f) = 0.01$$

Komplementer eseménnyel számolva:

$$P(X \leq f\ \text{és}\ 1000 - X \leq f) = 0.99$$

Azaz:

$$P(1000 - f \leq X \leq f) = 0.99$$

Standardizálás után, valamint kihasználva a ϕ függvény szimmetriáját:

$$P\left(\frac{500-f}{5\cdot\sqrt{10}} \leq \frac{x-500}{5\cdot\sqrt{10}} \leq \frac{f-500}{5\cdot\sqrt{10}}\right) = \phi\left(\frac{f-500}{5\cdot\sqrt{10}}\right) - \left(1 - \phi\left(\frac{f-500}{5\cdot\sqrt{10}}\right)\right) =$$

$$= 2\cdot\phi\left(\frac{f-500}{5\cdot\sqrt{10}}\right) - 1 = 0.99$$

$$\phi\left(\underbrace{\frac{f-500}{5\cdot\sqrt{10}}}_{2.58}\right) = 0.995$$

Ebből a fogasok száma már meghatározható:

$$\boldsymbol{f} = 2.58\cdot 5\cdot\sqrt{10} + 500 = 540.79 \cong \mathbf{541}$$

3. Overbooking – Túlkönyvelés

Túlkönyvelést a légitársaságok alkalmazzák: több jegyet adnak el, mint ahány hely van a gépen.
300 férőhelyes repülőgépre a légitársaság valamivel több jegyet ad el, arra számítva, hogy az utasok nem mind jelennek meg az adott időben. Tegyük fel, hogy az utasok egymástól függetlenül 0.2 valószínűséggel nem jelennek meg az adott időben. Hány jegyet adhatnak el legfeljebb 1% legyen a valószínűsége annak, hogy egy utas nem fér fel a járatra?

Legyen *n* az eladott jegyek száma, X pedig egy valószínűségi változó, amely azt mondja meg, hogy a jeggyel rendelkező személyek közül hány megy oda időben.
X egy n-ed rendű binomiális eloszlású változónak tekinthető p=0.8 valószínűséggel, ezt normális eloszlással közelítjük:

$$\sim B_n(0.8) \sim N(n\cdot 0.8, n\cdot 0.8\cdot 0.2)$$

A feladat célkitűzése matematikai alakban megfogalmazva:

$$P(X > 300) \leq 0.01$$

Ebből:

$$P(X \leq 300) = \phi\left(\underbrace{\frac{300-0.8\cdot n}{\sqrt{n}\cdot 0.4}}_{2.345}\right) \geq 0.99$$

A ϕ – táblázatban található 2.34-es érték leolvasása után egy másodfokú egyenlethez jutunk, hiszen:

$$\frac{300 - 0.8 \cdot n}{\sqrt{n} \cdot 0.4} \geq 2.345$$

$n = x^2$ helyettesítéssel, és rendezve:

$$0 \geq 0.8x^2 + 0.938x - 300$$

Az egyenletet a másodfokú megoldó képlettel megoldva két eredményt kapunk, a negatív megoldást figyelmen kívül hagyhatjuk, így x -re:

$x = 18.78$ adódik, amibe visszahelyettesítve az eredeti változónkat:

$\boldsymbol{n} = x^2 \cong \mathbf{353}$

Azaz 353 jegyet adhat el maximum a légitársaság a feladatban kitűzött feltétel teljesítéséhez.