.

æ

A3 6-7. GYAKORLAT (* feladatok nem kötelezőek)

1. Az 1,2,4,5,7 számkártyák mindegyikének felhasználásával hány különböző 5-jegyű szám készíthető?
2. A 0,2,4,5,7 számkártyák mindegyikének felhasználásával hány különböző 5-jegyű szám készíthető? Ezekből hány páros, és hány páratlan?
3. Az 1,1,4,4,4,5 számkártyák mindegyikének felhasználásával hány különböző 6-jegyű szám készíthető?
4. A KOMBINATORIKA szó betűinek összekeverésével hány különböző 13 betűs (értelmes vagy értelmetlen) szó készíthető?
5. Az 1,2,4,5,7 számkártyákból hány különböző
   a. olyan 3-jegyű szám készíthető, melyeknek számjegyei egymás közt is kölönböznek?
   b. 3-jegyű szám készíthető?
   c. 5-jegyű szám készíthető?
   d. 7-jegyű szám készíthető?
6. Hány különböző olyan rendszámtábla készíthető az abc 26 betűjének és a $0, 1, \ldots, 9$ számjegyeknek tetszőleges felhasználásával, amelyben
   a. 3 betűt 3 számjegy követ?
   b. 2 betűt 4 számjegy követ?
   c. Melyik szisztémában van több lehetőség? Hányszor több?
7. Hányféleképpen tölthető ki egy totószelvény?
8. Egy 20-fős tankörben
   a. mindenki mindenkivel kezet fog. Hány kézfogás ez?
   b. tanulmányi, kulturális és sportfelelőst választanak (ezek különböző személyek). Hányféle választás lehetséges?
   b. 3 személyt delegálnak a hallgató önkormányzat gyűlésére. Hányféle választás lehetséges?
9. Hány olyan 3-jegyű szám van, melynek jegyei
   a. csökkenő sorrendben követik egymást?
   b. (*) növekvő sorrendben követik egymást?
10. Hányféleképpen tölthető ki egy lottőszelvény? (*) Adjon algoritmust a különböző számötösök felsorolására!
11. Hányféleképpen lyukasztható ki egy buszjegy, ha
    a. 3 lyukat ejt a lyukasztó?
    b. ha tetszőleges (min. 1 és max. 9 számú) lyukat ejt a lyukasztó?

12. Cukrászdában 10 különböző fajta torta van. Hányféleképpen választhatunk
    a. 3 szelet tortát különböző fajtákból?
    b. (*) 3 szelet tortát?
    c. (*) 20 szelet tortát?
13. Egy 20-fős tankör (10 fiú, 10 lány) kirándulni megy a János-hegyre. Hányféleképpen
    a. alakíthatnak párokat, mikor felszállnak a libegőre?
    b. alakíthatnak (fiú–lány) táncospárokat, ha a fenti étteremben mindenki táncol?
    c. alakíthatnak 4 fős csoportokat, ha 5 erdei asztalhoz leülnek ennivalójukat elfogyasztani?
    d. alakíthatnak 4 fős csoportokat, ha az 5 csoport különféle feladatköröket lát el (egyik rőzsét hord, a másik tüzet gyújt, a harmadik főz, stb.).
14. Hányféleképpen olvasható ki a BELFEGOR szó az alábbi elrendezésből, ha a bal felső sarokból a jobb alsó felé haladunk (jobbra vagy lefelé)?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| B | E | L | F | E |
| E | L | F | E | G |
| L | F | E | G | O |
| F | E | G | O | R |

15. Az előbbi feladat alapján: Pascal háromszög, binomiális együtthatók képzési szabálya. Binomiális tétel és az alábbi összefüggések kombinatorikus bizonyítása:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

$$0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} + \binom{m}{k-i}$$

16. Egy vetélkedőn 4 informatikus, 5 villamos-, 6 építő- és 7 gépészkaros hallgató vesz részt. Egyik feladat megoldásához hányféleképpen lehet közülük 5 személyt kiválasztani úgy, hogy mind a négy kar képviselve legyen közöttük?
17. (*) Egy DNS-részlet 20 hosszúságú, A,T,C,G jelekből álló sorozat. Hány különböző olyan sorozat létezik, amelyben a négyféle jel mindegyike szerepel legalább egyszer? (Ekvivalens feladat: 20 fős tankör minden tagja egy gombócot eszik A,T,C,G

fagyik közül. Hányféleképpen fagyizhatnak, ha mind a négy ízből legalább egyvalaki eszik?)

Megoldások:

1. Mivel mind az 5 kártyát fel akarjuk használni, ezért az első helyre 5 szám kerülhet, a második helyre már csak 4, és így tovább, az 5-jegyű szám legalsó helyiértékére már csak 1 kártya közül "választhatunk". Azaz:
$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$$
2. A 0-s kártya nem kerülhet a legmagasabb helyiértékre, így oda csak 4 szám közül választhatunk, a többi 4 helyiértékre kerülő számokat viszont ezután is 4! féleképpen tudjuk kiválasztani:
$$4 \cdot 4!$$
*Páratlan*: Vagy 5-össel, vagy 7-essel kell végződnie, mindkét esetben 3 * 3! féleképpen helyezhetjük el a többi 4-et, így a páratlanok száma:
$$2 \cdot 3 \cdot 3!$$
*Páros*: Komplementer eseménye a páratlan számoknak:
$$4 \cdot 4! - 2 \cdot 3 \cdot 3!$$

3. 6 különböző szám esetén az 1. feladat alapján 6! lenne, azonban a többször előforduló számokat(1-es, 4-es), amelyek n-szer fordulnak elő, n! féleképpen tudjuk úgy cserélgetni, hogy ugyanazt a számot kapjuk, azaz 2!-al illetve 3!-al le kell osztani:
$$\frac{6!}{2! \cdot 3!}$$

4. Az előző feladat analógiájára (K,O,I,A betűk kétszer-kétszer fordulnak elő):
$$\frac{13!}{2^4}$$

5.

***a***. 5 számjegyből választhatunk 3 helyre, egyik sem szerepelhet benne többször, ezért: $5 \cdot 4 \cdot 3$

***b***. Ha ismétlődhetnek a számok akkor mindhárom helyiértékre 5 számjegyből választhatunk: $5^3$

***c***. A b feladat analógiájára: $5^5$

***d***. Szintén a fentiek miatt: $5^7$

6.

**a**. A 3 betűs helyre $26 \cdot 26 \cdot 26$ kombináció, a 3 számos helyre $10 \cdot 10 \cdot 10$ db különböző szám kerülhet: $26^3 \cdot 10^3$

**b**. Fentiek alapján: $26^2 \cdot 10^4$

**c**. Az első esetben több lehetőség van, egész pontosan a-ban 2.6-szor több, mint b-ben

7. A totószelvényen 13 esemény 3 féle kimenetelére tippelhetünk, azaz minden sort 3 féleképp tölthetünk ki: $\mathbf{3^{13}}$

8.

***a***. Mind a 20 ember 19 másikkal fog kezet, viszont $20 \cdot 19$ esetén minden kézfogást kétszer számolnánk, ezért még kell egy $\frac{1}{2}$ -es szorzó:

$$\frac{20 \cdot 19}{2}$$

***b***. Különböző személyek, így az 1. posztra még 20 emberből, a másodikra 19-ből az utolsóra pedig 18 személyből lehet választani:

$$20 \cdot 19 \cdot 18$$

***c***. 20 emberből 3-at kiválasztani definíció alapján $\binom{20}{3}$ -képpen lehet

9.

***a***. A 10 számjegyből 3-at kiválasztani $\binom{10}{3}$ módon tudok, ezeket a számharmasokat csökkenő sorba rendezni pedig hármasonként csak 1 féleképp lehet, így:

$$\binom{10}{3}$$

***b***. Az a feladathoz hasonlóan itt is 3 számot kell kiválasztanunk, azonban ebben a 0 nem szerepelhet, mivel növekvő sorrend esetén a legmagasabb helyiértéken kéne szerepelnie, 0-val viszont nem kezdődhet szám, így marad 9 számjegy:

$$\binom{9}{3}$$

10. A 90 számból 5-öt $\binom{\mathbf{90}}{\mathbf{5}}$ módon lehet kiválasztani.

11.

***a***. A 9 helyből 3 különbözőt a lyukasztó $\binom{\mathbf{9}}{\mathbf{3}}$ – **képpen** tud kilyukasztani

***b***. Ha k 1 és 9 közt változik akkor:

$$\sum_{k=1}^{9} \binom{9}{k} = 2^9 - 1$$

12.

***a***. 10 fajta tortából 3 különböző darabot $\binom{10}{3}$ – képpen lehet kiválasztani

***b***. 10 elem 3-ad osztályú ismétléses kombinációi:

$$\binom{10+3-1}{3} = \binom{12}{3}$$

***c***. 10 elem 20-ad osztályú ismétléses kombinációi:

$$\binom{10+20-1}{20} = \binom{29}{20}$$

13.

***a***. Mivel mindenki mindenkivel alakíthat part, ezért az első párt $\binom{20}{2}$ – féleképp választhatjuk ki, a másodikat $\binom{18}{2}$ , stb. Így: $\binom{20}{2}\binom{18}{2} \dots \binom{4}{2}$, amit még osztanunk kell 10!-al, ha a párok sorrendje nem számít.

***b***. Az első fiú még 10 lányból tud választani párt, a második 9-ből, stb. Ezért a lehetséges párok száma: 10!

***c***. Az 1. csoportot $\binom{20}{4}$– féleképp tudjuk kiválasztani, a másodikat $\binom{18}{4}$ módon, stb. Mivel a csoportok sorrendje nem számít, osztunk 5!-al:

$$\binom{20}{4} \cdot \binom{16}{4} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} \cdot \frac{1}{5!}$$

***d***. Hasonló, mint a c feladat, csak a sorrend is számít:

$$\binom{20}{4} \cdot \binom{16}{4} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4}$$

14. 3 lefele lépést és 4 jobbra lépést tetszőleges sorrendben tehetünk meg, azaz az összesen 7 lépésből válasszuk ki, hogy melyik 3-nál lépünk lefele (vagy melyik 4-nél lépünk jobbra, ezek egyenértékűek). Ezt $\binom{7}{3}$ módon tehetjük meg.

16. 5 hely van, és mind a 4 kar képviselve kell legyen, így valamelyik karból 2 ember lesz. Ezek egymástól független lehetőségek, így külön-külön összeadódnak:

$$\binom{4}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 + \binom{5}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 + \binom{6}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 + \binom{7}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$$

17. Összesen $4^{20}$ sorozat létezik amit az A,T,C,G betűkből 20 hosszan tudunk kitenni, ebből azonban le kell vonni azokat az eseteket amikor csak 4 betűt használtunk, ez $\binom{4}{1} \cdot 3^{20}$ . Ekkor viszont levontuk a 2 betűs sorozatokat is, ezeket hozzá kell adnunk: $\binom{4}{2} \cdot 2^{20}$ . Értelemszerűen ebben benne vannak az 1 betűből álló 20 hosszú sorozatok, ezeket ismét le kell vonni: $\binom{4}{3} \cdot 1^{20}$ . Így a teljes lehetséges sorozatok száma:

$$4^{20} - \binom{4}{1} \cdot 3^{20} + \binom{4}{1} \cdot 2^{20} - \binom{4}{1} \cdot 1^{20}$$

# További kombinatorika feladatok a 6-7. hétre

**1. TÉTEL: (A leszámlálás alapelve:)** Tegyük fel, hogy *r* kísérletet hajtunk végre, úgy, hogy az első kísérlet $n_1$ különböző eredménnyel végződhet és ezen $n_1$ eredmény mindegyikére a második kísérlet $n_2$ különböző eredménnyel végződhet és az első két kísérlet mindegyik lehetséges eredményére a harmadik kísérlet $n_3$ eredménnyel végződhet és így tovább, akkor az r kísérlet összesen $n_1 n_2 \cdots n_r$ eredménnyel végződhet.

1. Egy gyermekfaluban minden hónapban kiosztják a "Hónap anya-gyerek" címet. Hányféleképpen lehet ezt megtenni, ha a faluban 10 anya él, és mindegyik anyához 3 gyerek tartozik?
2. Egy gimnázium diák tanácsát 5 elsős, 6 másodikos, 7 harmadikos, és 4 negyedikes alkotja. Ebből a tanácsból albizottságot alakítanak, amelybe mindegyik csoportból egy-egy főt delegálnak. Hány albizottság alakítható ki?
3. Hány különböző 6 karakterű rendszám készíthető, ha az első három karaktert betűk, a második három karaktert számok alkotják?
4. Hány különböző függvény létezik, melyeknek értelmezési tartománya az $\{1, 2, \ldots, m\}$ halmaz és értékkészlete az $\{1, 2\}$ halmaznak részhalmaza.
5. 8 fiú és 6 lány vizsgázik matematikából. Eredményességük alapján rangsoroljuk őket. Nincs két diák, aki ugyanazt az eredményt érte volna el.
   (a) Hány különböző rangsor készíthető?
   (b) Ha a fiúk is kizárólag maguk között állítanak fel egy sorrendet és a lányok is kizárólag maguk között állítanak fel egy sorrendet, akkor az hányféleképpen tehető meg?
6. 12 könyvből 5 matematikával, 2 kémiával, 3 történelemmel, és 2 angol nyelvtannal foglalkozik. A 12 könyvet úgy szeretnénk egy könyvespolcon elhelyezni, hogy az azonos témájú könyvek egymásmellé kerüljenek. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?
7. Hányféleképpen rendezhetők sorba a következő betűk: B A B B A C?
8. Egy 4 fős bizottságot választanak 22 emberből. Hányféleképpen tehető ez meg?
9. 5 nőből és 9 férfiból olyan bizottságot akarnak létrehozni, amelyben 3 nő és 4 férfi van. Hány bizottság hozható létre, ha a 9 férfiból van kettő olyan aki nem hajlandó egy bizottságban dolgozni?

## ***Megoldások:***

1. Mivel minden anyához 3 gyerek tartozik, minden anyánál 3 lehetséges párosítás jön szóba. Mivel 10 anya van, ezért:

$$10 \cdot 3 = 30$$

2. Mindegyik évfolyamból 1 embert delegálnak, így mivel *n* elemből 1-et *n*-féleképp lehet kiválasztani:

$$5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 4$$

3. Az angol ABC betűit használva egy 26 elemű betűhalmaz, illetve egy 10 elemű számjegyhalmaz áll rendelkezésünkre. A 3 betű ill. a 3 szám helyére is Bármelyik betű ill. szám kerülhet, így:

$$26^3 \cdot 10^3$$

4. Bináris értékkészlettel rendelkező függény értelmezési tartományának minden egyes eleme 2 értéket vehet fel. Mivel 1-től *m*-ig tart az értelmezési tartomány *m*-szer tudunk a 2 érték közül választani:

$$2^m$$

5.
   a) Az első helyre 14 diák kerülhet, a másodikra 13, és így a tovább, az utolsó helyezettett már csak 1 személyből „választhatjuk ki”:

   $$14!$$

   b) Ha a fiúk és a lányok külön-külön állítanak fel maguk közt sorrendet, akkor az előző analógiájára:

   $$8! \cdot 6!$$

6. Vegyük úgy, mint ha az azonos tematikájú könyvek össze lennének kötve 1-1 blokkba. Így 4 blokkunk van, amit értelmszerűen 4!-féleképp tudunk sorbarendezni. Viszont még az egyes tantárgyakon belüli *n* db könyvet is *n*!-képpen tudjuk sorbarendezni, ezért:

$$4! \cdot 5! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 2!$$

7. 6 különböző elemet 6! módon lehet sorbarendezni, mivel azonban az azonos betűk különböző sorrendje nem minősül különböző sorbarendezésnak, azok, faktoriálisával osztani kell:

$$\frac{6!}{2! \cdot 3!}$$

8. Definíció alapján n emberből k db-ot kiválasztani $\binom{n}{k}$ - féleképp lehet, így:

$$\binom{22}{4}$$

9. Az 5 nőből 3-at természetesen $\binom{5}{3}$ módon tudunk kiválasztani. A 9 férfiból 4-et $\binom{9}{4}$ - féleképp lehet kiválasztani, ebből viszont le kell vonni azon eseteket, mikor a két ominózus férfi együtt szerepelne, ekkor melléjük még 2 embert $\binom{7}{2}$ - képpen választhatunk. Így a végeredmény:

$$\binom{5}{3} \cdot \left( \binom{9}{4} - \binom{7}{2} \right)$$

**Feladatok és megoldások a 8. hétre**

*Építőkari Matematika A3*

1. Tegyük fel, hogy $A$ és $B$ egymást kölcsönösen kizáró események, melyekre $\mathbb{P}\{A\} = 0.3$ és $\mathbb{P}\{B\} = 0.5$. Mi a valószínűsége, hogy
   (a) $A$ vagy $B$ bekövetkezik;
   (b) $A$ bekövetkezik, de $B$ nem következik be;
   (c) $A$ és $B$ is bekövetkezik?

2. A férfiak 28%-a cigarettázik, 7%-a szivarozik, 5%-a pedig cigarettázik és szivarozik is.
   (a) Hány százalékuk nem cigarettázik és nem is szivarozik?
   (b) Hány százalékuk szivarozik, de nem cigarettázik?

3. Egy kis közösség 20 családból áll. 4 családban egy gyermek van, 8 családban két gyermek van, 5 családban három, 2 családban négy, 1 családban pedig öt gyermek található.
   (a) Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott családban $i$ gyermek van, $i = 1, 2, 3, 4, 5$?
   (b) Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott gyermek $i$ gyerekes családból jött, $i = 1, 2, 3, 4, 5$?

4. Feldobunk egy érmét kétszer egymás után. Mi a valószínűsége, hogy dobunk fejet? És hogy *pontosan* 1 db fejet dobunk?

5. Mi a valószínűsége annak, hogy két darab (szabályos) kocka feldobásakor legalább az egyik 6-os lesz? És annak a valószínűsége, hogy egyik sem lesz 6-os?

6. Két szabályos kockával dobunk. Mi a valószínűsége, hogy a második kockával nagyobbat dobunk, mint az elsővel?

7. Mindkét szabályos kockánknak két piros, két fekete, egy sárga, és egy fehér oldala van. Ezzel a két kockával dobva mi a valószínűsége, hogy egyforma színű oldaluk lesz fölül?

8. Mi a valószínűsége annak, hogy egy háromgyermekes családban a gyerekek mind egyneműek? (Feltesszük, hogy a gyermekek egymástól függetlenül 1/2 valószínűséggel lesznek fiúk és lányok.)

9. Legalább hány szabályos pénzdarabot kell feldobni ahhoz, hogy 90%-nál nagyobb legyen az esély arra, hogy legyen köztük fej?

10. Hatszor dobunk egy szabályos dobókockával. Mi a valószínűsége annak, hogy mind a hat szám előjön?

11. Öt ember, $A, B, C, D, E$, véletlenszerűen sorba áll. Mi a valószínűsége, hogy

    (a) pontosan egy ember van $A$ és $B$ között;

    (b) pontosan két ember van $A$ és $B$ között;

    (c) pontosan három ember van $A$ és $B$ között?

12. Mi a valószínűsége annak, hogy egy 30 fős hallgatóságban nincs két olyan ember, akiknek a születésnapja megegyezik? (Feltesszük, hogy a születésnapok egymástól függetlenül egyenlő valószínűséggel oszlanak el az év 365 napja között. Ne foglalkozzunk a szökőévekkel.)

13. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az ötös lottón pontosan két találatunk lesz?

14. Egy erdőben 20 őz él, melyekbol 5-öt befogtak, megjelöltek, majd visszaengedtek. Később ebből a 20 őzből 4-et befogunk. Mi a valószínűsége, hogy a négyből pontosan 2 van megjelölve? Milyen feltevésekkel élünk?

15. Egy konferencián 30 pszichiáter és 24 pszichológus vesz részt. Az 54 résztvevőből hármat véletlenszerűen kiválasztanak, akik egy fórumon vesznek részt. Mi a valószínűsége, hogy legalább egy pszichológus lesz köztük?

## Eredmények

1. (a) $\mathbb{P}\{A \cup B\} = 0.3 + 0.5 = 0.8$.

   (b) $\mathbb{P}\{A \cap B^c\} = \mathbb{P}\{A\} = 0.3$.

   (c) $\mathbb{P}\{A \cap B\} = \mathbb{P}\{\emptyset\} = 0$.

2. Legyen $E$ az az esemény, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott férfi cigarettázik, és $F$ az az esemény, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott férfi szivarozik.

   (a) $\mathbb{P}\{E^c \cap F^c\} = 1 - \mathbb{P}\{E \cup F\} = 1 - \mathbb{P}\{E\} - \mathbb{P}\{F\} + \mathbb{P}\{E \cap F\} = 1 - 0.28 - 0.07 + 0.05 = 0.7$ vagy 70%.

   (b) $\mathbb{P}\{F \cap E^c\} = \mathbb{P}\{F - E\} = \mathbb{P}\{F\} - \mathbb{P}\{F \cap E\} = 0.07 - 0.05 = 0.02$ vagy 2%.

3. (a) A valószínűségek sorrendben $\frac{4}{20}, \frac{8}{20}, \frac{5}{20}, \frac{2}{20}, \frac{1}{20}, i = 1, 2, 3, 4, 5$ esetén.

(b) A valószínűségek sorrendben $\frac{4}{48}, \frac{16}{48}, \frac{15}{48}, \frac{8}{48}, \frac{5}{48}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ esetén.

4. Legalább egy dobásunk fej akkor és csak akkor, ha nem mindkét dobásunk írás. A valószínűség tehát 3/4. Pontosan egy fej kétféleképpen fordulhat elő ((**H, T**) és (**T,H**)) a négy lehetőségből, így a valószínűség 1/2.

5. Legalább egy hatost dobunk, hogy ha nem igaz az, hogy mindkét dobásunk nem 6-os. A válasz tehát $1 - (5/6)^2$. Nem dobunk egy 6-ost sem $(5/6)^2$ valószínűséggel.

6. *1. megoldás*: Az az $E$ esemény, hogy a második kockával nagyobbat dobunk mint az elsővel a következő elemi eseményekből áll:

$$\begin{array}{rlllll} E = \{(1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), \\ & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6), \\ & & (3,4), & (3,5), & (3,6), \\ & & & (4,5), & (4,6), \\ & & & & (5,6)\}. \end{array}$$

Ezért $\#E = 15$, míg az eseménytér számossága $\#S = 36$, így a valószínűség 15/36 = 5/12.

*2. megoldás*: Az $E$ esemény olyan számpárokból áll, melyeknek a második tagja nagyobb, mint az első tagja. Minden ilyen pár előáll az $\{1, 2, ..., 6\}$ számok 2-kombinációjából, ha a kiválasztott két számot növekvő sorrendbe állítjuk. Ezért $\#E = \binom{6}{2} = 15$, és $\mathbb{P}\{E\} = 15/36 = 5/12$.

*3. megoldás*: Definiáljuk az $F$-et mint azt az eseményt, hogy az első kockával nagyobbat dobunk, mint a másodikkal. Szimmetriaokokból $\mathbb{P}\{E\} = \mathbb{P}\{F\}$, és $(E \cup F)^c$ az az esemény, hogy a két kockával egyformát dobtunk, melynek az esélye 1/6. Ezért $5/6 = \mathbb{P}\{E \cup F\} = \mathbb{P}\{E\} + \mathbb{P}\{F\} - \mathbb{P}\{E \cap F\} = \mathbb{P}\{E\} + \mathbb{P}\{E\} - 0 = 2\mathbb{P}\{E\}$, melyből $\mathbb{P}\{E\} = 5/12$.

7. Mind a két kockának a piros oldala lesz fölül $2 \cdot 2 = 4$ esetben, mindkettőnek a fekete oldala lesz fölül $2 \cdot 2 = 4$ esetben, a sárga oldalak lesznek fölül 1 esetben, és a fehér oldalak lesznek fölül 1 esetben. Ez összesen 10 eset a 36 egyenlő valószínűségű kimenetelből, tehát a valószínűség $10/36 = 5/18$.

8. A gyerekek nemét tekintve 8 egyenlő valószínűségű kimenetel van. Ezek közül két esetben lesz a három gyermek egynemű, a válasz tehát $2/8 = 1/4$.

9. Annak valószínűsége, hogy legalább egy fejet dobunk $n$ dobásból $1 - (1/2)^n$. Ezért

keressük $n$-et, melyre

$$\begin{aligned}
1-\left(\frac{1}{2}\right)^n &\geq 0.9 \\
0.1 &\geq \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
\log_2(0.1) &\geq -n \\
\log_2(10) &\leq n.
\end{aligned}$$

Mivel $n$ egész, a válasz az, hogy legalább $\lceil \log_2(10) \rceil = 4$ dobásra van szükség. (Itt $\lceil x \rceil$ a felsőegészrészt jelöli, vagyis azt a legkisebb egész számot, amely $x$-nél nagyobb vagy vele egyenlő.)

10. Azon esetek száma melyekben mind a hat szám előjön megegyezik e hat szám permutációinak számával, azaz 6!-sal. Az eseménytér a hat számjegyből felírható bármilyen, hat hosszúságú sorozatok halmaza, ezért $\#S = 6^6$. A keresett valószínűség tehát $6!/6^6 = 5!/6^5 \simeq 0.015$.

11. *megoldás sorrenddel*:

    (a) Háromféleképpen választhatjuk ki az ötbol azt a két pozíciót, ahova $A$ és $B$ kerülnek úgy, hogy egy üres hely legyen köztük. Ha ezt megtettük, $A$-t és $B$-t kétféle sorrendben állíthatjuk erre a két pozícióra. Ekkor három üres helyünk marad, melyekre $3! = 6$ féleképpen állíthatjuk $C$-t, $D$,-t és $E$-t. Ezért $3 \cdot 2 \cdot 3! = 36$ sorrend van úgy, hogy pontosan egy személy kerül $A$ és $B$ közé. Mivel mind az $5! = 120$ sorrend egyformán valószínű, a válasz $36/120 = 3/10$.

    (b) Kétféleképpen választhatjuk ki azt a két pozíciót, ahova $A$ és $B$ kerülnek, azután $A$-t és $B$-t kétféle sorrendben állíthatjuk erre a két pozícióra, majd a maradék helyekre $3! = 6$ féleképpen állíthatjuk sorba $C$-t, $D$,-t és $E$-t. Ezért $2 \cdot 2 \cdot 3! = 24$ olyan sorrend van, ahol pontosan két ember kerül $A$ és $B$ közé, a válasz $24/120 = 1/5$.

    (c) Csak egyféleképpen választhatjuk ki azt a két pozíciót, ahova $A$ és $B$ kerülnek, azután $A$-t és $B$-t kétféle sorrendben állíthatjuk erre a két pozícióra, majd a maradék helyekre $3! = 6$ féleképpen állíthatjuk sorba $C$-t, $D$,-t és $E$-t. Ezért $1 \cdot 2 \cdot 3! = 12$ olyan sorrend van, ahol pontosan két ember kerül $A$ és $B$ közé, a válasz $12/120 = 1/10$.

    *megoldás sorrend nélkül*:

    (a) Háromféleképpen választhatjuk ki az ötből azt a két pozíciót, ahova $A$ és $B$ kerülnek úgy, hogy egy üres hely legyen köztük. Mivel e két pozícióra nézve mind az $\binom{5}{2}$ lehetőség egyenlő valószínű, a válasz $3/\binom{5}{2} = 3/10$.

(b) Kétféleképpen választhatjuk ki azt a két pozíciót, ahova $A$ és $B$ kerülnek, a válasz most $2/\binom{5}{2} = 1/5$.

(c) Csak egyféleképpen választhatjuk ki azt a két pozíciót, ahova $A$ és $B$ kerülnek, a válasz most $1/\binom{5}{2} = 1/10$ lesz.

12. $365 \cdot 364 \cdots 336 = 365!/(365-30)!$ féleképpen oszthatunk ki 30 különböző születésnapot a hallgatóknak, míg 36530-féleképpen oszthatunk ki 30 tetszőleges születésnapot a hallgatóknak. Ezért a keresett valószínűség $365!/[335! \cdot 36530] \simeq 0.29$.

13. Annyiféleképpen lehet kettesünk, ahányféleképpen kiválasztható az öt nyerőszámból kett, és a 85 nem nyerő számból három. Ezért $\binom{5}{2} \cdot \binom{85}{3}$ féle kéttalálatos szelvény van, összesen $\binom{90}{5}$ különböző szelvény közül. A valószínűség tehát $\binom{5}{2} \cdot \binom{85}{3} / \binom{90}{5} \simeq 0.022$.

14. Ahhoz, hogy 2 megjelölt és 2 nem megjelölt őzet fogjunk, 2-t kell kiválasztanunk az 5 megjelölt őzből, és 2-t a 15 nem megjelölt őzből. Ezt $\binom{5}{2} \cdot \binom{15}{2}$ féleképpen tehetjük meg, míg $\binom{20}{4}$ féleképpen választható ki tetszoleges 4 őz. A valószínűség tehát $\binom{5}{2} \cdot \binom{15}{2} / \binom{20}{4} \simeq 0.22$.

    A kérdést máshogy is megtámadhatjuk, ha az idő visszafordításával azt kérdezzük, hogy mennyi a valószínűsége annak, hogy az általunk fogott 4-ből kettő, és az általunk nem megfogott 16-ból három őz van megjelölve. Ekkor a válasz $\binom{4}{2} \cdot \binom{16}{3} / \binom{20}{5}$. A binomiálisok határozott kérésre bevallják, hogy a két válasz tulajdonképpen megegyezik.

15. Ha elosztjuk, hogy hányféleképpen választható a 30-ból 3 pszichiáter a fórumba azzal, ahányféleképpen az 54 résztvevőből választható 3 ember a fórumba, akkor megkapjuk annak a valószínűségét, hogy a fórumba nem választanak pszichológust: $\binom{30}{3} / \binom{54}{3}$. A válaszunk ezen esemény komplementumának valószínűsége, azaz $1 - \binom{30}{3} / \binom{54}{3} \simeq 0.84$.