Feladatok és megoldások a 11. heti gyakorlathoz
diszkrét várható érték
Építőkari Matematika A3

1. Egy versenyen öt női és öt férfi versenyző indul. Tegyük fel, hogy nincs két azonos eredmény, és mind a 10! sorrend egyformán valószínű. Legyen X a legjobb női versenyző helyezése. (Például ha $X = 1$, akkor nő lett a verseny győztese.) Határozzuk meg X súlyfüggvényét, azaz a $\mathbb{P}\{X = i\}$ valószínűségeket, $i = 1, 2, \ldots, 10$.

2. Az X valószínűségi változó súlyfüggvénye $p(i) = \frac{i^2}{30}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Határozzuk meg X várható értékét.

3. Albert és Béla a következőt játszák: Mindketten feldobnak egy dobókockát, majd Albert annyi forintot kap Bélától amennyi a két kockán levő pontok különbségének a négyzete. Béla meg annyit kap Alberttől, amennyi a két kockán levő pontok összege. Melyiküknek kedvez a játék?

4. Egy sorsjátékon 1 darab 1 000 000 Ft-os, 10 darab 50 000 Ft-os, és 100 darab 5 000 Ft-os nyeremény van. A játékhoz 40 000 darab sorsjegyet adnak ki. Mennyi legyen a jegy ára, hogy egy sorsjegyre a nyeremény várható értéke a jegy árának felével egyezzen meg?

5. Tételezzük fel a 700 Ft, 10 000 Ft, 789 ezer Ft, és 535 millió Ft fix nyereményeket a lottón. 150 Ft-os jegyárral számolva mekkora az egy lottószelvényen várható nyereségünk?

6. Anna és Béla két kockával játszanak. Anna akkor fizet Bélának, ha mindkét feldobott kockán páratlan szám szerepel. Béla akkor fizet Annának, ha pontosan egy kockával páros számot dobnak. Ha más eset fordul elő, egyikük sem fizet. Milyen pénzösszegben állapodjanak meg, hogy a játék méltányos legyen?

7. Legyen X egy dobókockával dobott szám. Mennyi X várható értéke és szórása? Mi a helyzet n oldalú "kocka" esetén?

8. Egy iskolakirándulás során négy busz szállítja adiákokat. A négy buszban 40, 33, 25, illetve 50 diák utazik. Vétlenszerűen kiválasztunk egy diákot, legyen X az ő buszában utazó összes tanuló száma. A négy buszsofőr közül szintén egyet véletlenszerűen kiválasztunk, legyen Y az ő buszán utazó tanulók száma.
   (a) Mit gondolunk, $\mathbb{E}(X)$ vagy $\mathbb{E}(Y)$ lesz nagyobb? Miért?
   (b) Számoljuk ki $\mathbb{E}(X)$ és $\mathbb{E}(Y)$ értékét.
   (c) Számoljuk ki X és Y szórását.

9. Egy dobozból, amiben 4 piros és 6 fehér golyó van, visszatevés nélkül kihúzok 3 golyót. Jelölje X a kihúzott piros golyók számát. Határozzuk meg X eloszlását, várható értékét, és szórását.

10. Véletlenszerűen elhelyezünk egy huszárt egy üres sakktáblára. Mennyi a lehetséges lépései számának a várható értéke? (A 8×8-as sakktábla (i, j) négyzetén álló huszár egy lépésben az $(i+1, j+2)$, $(i-1, j+2)$, $(i-2, j+1)$, $(i-2, j-1)$, $(i-1, j-2)$, $(i+1, j-2)$, $(i+2, j-1)$, $(i+2, j+1)$ mezőkre léphet, amennyiben ezek még a sakktáblán találhatóak.)

11. Két kockával dobva, mennyi a dobott számok nagyobbikának illetve kisebbikének várható értéke?

12. Egy 1-től 10-ig véletlenszerűen kiválasztott számot kell kitalálnunk, igen-nem kérdésekkel. Számítsuk ki, hogy várhatóan hány kérdésre van szükségünk a következő esetekben:
    (a) Az i-edik kérdésünk a következő: "A szám i?", $i = 1, 2, \ldots, 10$.
    (b) Minden egyes kérdéssel megpróbáljuk kizárni a lehetséges számok felét, amennyire ez csak lehetséges. Például az első kérdésünk "A szám nagyobb, mint 5?". Ha igen, a második kérdésünk "A szám nagyobb, mint 7?", stb.
13. Ha $\mathbb{E}(X) = 1$ és $\mathbb{D}^2(X) = 5$, határozzuk meg a következő mennyiségeket:
    (a) $\mathbb{E}[(2 + X)^2]$,
    (b) $\mathbb{D}^2(4 + 3X)$.
14. Legyen X egy valószínűségi változó μ várható értékkel és σ szórással. Határozzuk meg

$$Y := \frac{X - \mu}{\sigma}$$

    várható értékét és szórását.
15. Hány véletlenszerűen kiválasztott emberre van ahhoz szükség, hogy közülük legalább egynek legalább 1/2 valószínűséggel ugyanaznap legyen a születésnapja, mint nekem?

Eredmények

1. Nyilván nulla a valószínűség, ha $i > 6$.
Sorrend nélkül: Ha a csak a versenyzők nemét nézzük, akkor mind a $\binom{10}{5}$ lehetséges elrendezés egyforma valószínű. Ezek közül meg kell számolnunk, hány elrendezés esetén lesz férfi az első $i-1$ helyen, azután pedig egy nő. Másszóval meg kell számolnunk hányféleképpen rendezhető el 4 nő és $5-(i-1) = 6-i$ férfi az első nő mögötti $10-i$ helyre. A válasz $\binom{10-i}{4}$, és a keresett valószínűség

$$\frac{\binom{10-i}{4}}{\binom{10}{5}} = \frac{(10-i)! \cdot 5! \cdot 5!}{10! \cdot 4! \cdot (6-i)!} = \frac{(10-i)! \cdot 5 \cdot 5!}{10! \cdot (6-i)!}.$$

Sorrenddel: Ebben az esetben minden versenyzőt különbözőnek tekintünk. Meg kell számonunk, hogy a 10! lehetőségből hány olyan sorrend van, ahol az első $i-1$ helyen férfi van, az i-dik helyen pedig nő. Az első $i-1$ helyre $5!/[5-(i-1)]! = 5!/(6-i)!$ féleképp válogathatunk sorrendben férfiakat (ismétlés nélküli variáció). Ezután jön 5 lehetőség az i-dik hely női versenyzőjének kiválasztására, majd a maradék $10-i$ helyre $(10-i)!$ féleképpen rendezhetjük el a versenyzőket. A keresett valószínűség tehát

$$\frac{5! \cdot 5 \cdot (10-i)!}{(6-i)! \cdot 10!}.$$

A válasz tehát $i = 1, 2, 3, 4, 5$ és 6 esetén $1/2,\ 5/18,\ 5/36,\ 5/84,\ 5/252,\ 1/252$.

2.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{4} i \cdot p(i) = \sum_{i=1}^{4} \frac{i^3}{30} = \frac{1^3}{30} + \frac{2^3}{30} + \frac{3^3}{30} + \frac{4^3}{30} = \frac{10}{3}.$$

3. Legyen X a két kockán levő pontok különbségének négyzete. Ekkor X súlyfüggvénye $p(0) = 1/6,\ p(1) = 10/36,\ p(4) = 8/36,\ p(9) = 6/36,\ p(16) = 4/36,\ p(25) = 2/36$, várható értéke

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{10}{36} + 4 \cdot \frac{8}{36} + 9 \cdot \frac{6}{36} + 16 \cdot \frac{4}{36} + 25 \cdot \frac{2}{36} = \frac{210}{36} = \frac{35}{6}.$$

Hasonlóan, Y a két kockán levő pontok összege, súlyfüggvénye $p(2) = p(12) = 1/36,\ p(3) = p(11) = 2/36,\ p(4) = p(10) = 3/36,\ p(5) = p(9) = 4/36,\ p(6) = p(8) = 5/36,\ p(7) = 6/36$, várható értéke 7=42/6. Béla tehát hosszú távon jobban jár.

4. A nyeremény várható értéke

$$\frac{1}{40\,000} \cdot 1\,000\,000\,\mathrm{Ft} + \frac{10}{40\,000} \cdot 50\,000\,\mathrm{Ft} + \frac{100}{40\,000} \cdot 5\,000\,\mathrm{Ft} = 50\,\mathrm{Ft},$$

a jegyet tehát 100 Ft-ért kell árulni.

5. A várható nyeremény

$$\frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{85}{3}}{\binom{90}{5}} \cdot 700 + \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{85}{2}}{\binom{90}{5}} \cdot 10\,000 + \frac{\binom{5}{4} \cdot \binom{85}{1}}{\binom{90}{5}} \cdot 789\,000 + \frac{1}{\binom{90}{5}} \cdot 535\,000\,000 \simeq 43.\underline{^{66}}\,\mathrm{Ft}.$$

Ha a jegyár 150 Ft, akkor várhatóan $106.\underline{^{34}}$ Ft-ot vesztünk szelvényenként.

6 Anna $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1/4$ eséllyel fizet Bélának, Béla pedig $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1/2$ eséllyel fizet Annának. A játék méltányos, ha Anna kétszer annyit fizet, mint Béla, pl. 2 petákot, míg Béla 1 petákot.

7 n oldalú "kocka" esetén X súlyfüggvénye $p(i) = 1/n$, $i = 1, 2, \ldots n$. A számtani sor összegképletével

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot p(i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

A szóráshoz a második momentum is kell, ehhez felhasználjuk a négyzetszámok összegére vonatkozó képletet:

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{n} i^2 \cdot p(i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{2n^2+3n+1}{6}.$$

A szórás ezek segítségével

$$\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2} = \sqrt{\frac{2n^2+3n+1}{6} - \frac{n^2+2n+1}{4}} = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}.$$

Kocka eseén $n = 6$, $\mathbb{E}(X) = 7/2$, $\mathbb{D}(X) = \sqrt{35/12}$.

8.(a) Nagyobb eséllyel választunk egy diákot egy tömöttebb buszról, míg a sofőr választásakor minden busz egyenlő valószínű. Ezért X várhatóan nagyobb lesz Y-nál.

(b) X súlyfüggvényét felhasználva

$$\mathbb{E}(X) = 40 \cdot \frac{40}{148} + 33 \cdot \frac{33}{148} + 25 \cdot \frac{25}{148} + 50 \cdot \frac{50}{148} \simeq 39.28.$$

Y egyenlő eséllyel veszi föl bármelyik megadott létszám értékét,

$$\mathbb{E}(Y) = 40 \cdot \frac{1}{4} + 33 \cdot \frac{1}{4} + 25 \cdot \frac{1}{4} + 50 \cdot \frac{1}{4} = 37.$$

(c) A szóráshoz meghatározzuk a második momentumokat:

$$\mathbb{E}(X^2) = 40^2 \cdot \frac{40}{148} + 33^2 \cdot \frac{33}{148} + 25^2 \cdot \frac{25}{148} + 50^2 \cdot \frac{50}{148} \simeq 1625.4,$$

$$\mathbb{E}(Y^2) = 40^2 \cdot \frac{1}{4} + 33^2 \cdot \frac{1}{4} + 25^2 \cdot \frac{1}{4} + 50^2 \cdot \frac{1}{4} = 1453.5.$$

A szórások

$$\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)^2]} \simeq \sqrt{1625.4 - 39.28^2} \simeq 9.06,$$
$$\mathbb{D}(Y) = \sqrt{\mathbb{E}(Y^2) - [\mathbb{E}(Y)^2]} \simeq \sqrt{1453.5 - 37^2} \simeq 9.19.$$

9. X súlyfüggvénye:

$$p(0) = \frac{\binom{4}{0}\cdot\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{6}, \quad p(1) = \frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{6}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{2}, \quad p(2) = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{10}, \quad p(3) = \frac{\binom{4}{3}\cdot\binom{6}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{30}.$$

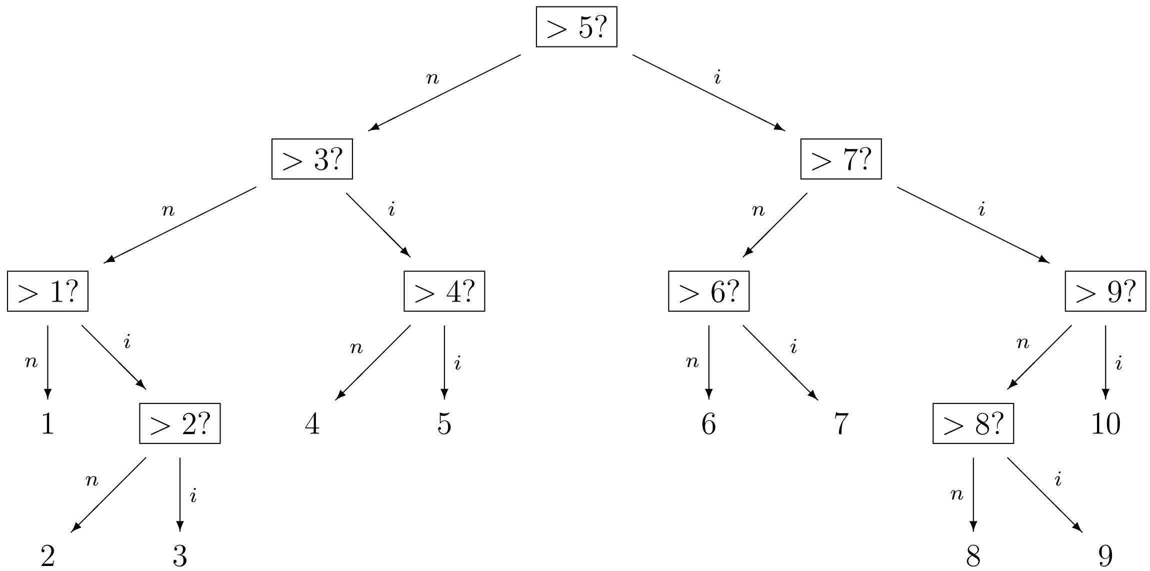
Ezek alapján

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{1}{30} = \frac{6}{5},$$
$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{6} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{3}{10} + 3^2 \cdot \frac{1}{30} = 2,$$

$\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2} = \sqrt{2 - [6/5]^2} = \sqrt{14}/5.$

12.(a) Legyen X a véletlen szám. A módszerünk szerint annyi kérdésre van szükség amennyi az X értéke. Ezért a válasz $\mathbb{E}(X) = 5.5$.

(b) Legyen a stratégiánk a következő:



Az első kérdésünk az, hogy a szám nagyobb-e, mint 5. Ennél, és a további kérdéseknél mindig próbáljuk megfelezni a lehetőségeket. Három kérdés szükséges akkor és csak akkor, ha a véletlen szám $1, 4, 5, 6, 7$, vagy 10 (azaz 6/10 valószínűséggel), négy kérdés szükséges akkor és csak akkor, ha a véletlen szám $2, 3, 8$, vagy 9 (4/10 valószínűséggel). A kérdések várható száma ezért $3 \cdot \frac{6}{10} + 4 \cdot \frac{4}{10} = \frac{17}{5} = 3.4$. 1 től 10-ig terjedő véletlen számnál a két módszer várható időtartama nem különbözik számottevően, azonban nagy véletlen számoknál a (b) módszer lényegesen gyorsabban működik.

13.(a) $\mathbb{E}[(2+X)^2] = \mathbb{E}(4)+\mathbb{E}(4X)+\mathbb{E}(X^2) = 4+4\mathbb{E}(X)+\mathbb{D}^2(X)+[\mathbb{E}(X)]^2 = 4+4\cdot 1+5+1^2 = 14.$

(b) A szórásnégyzet esetén az additív konstans nem számít, a multipliktaív konstans pedig négyzetesen jön ki a szórásnégyzet alól. Ezért $\mathbb{D}^2(4+3X) = 3^2 \cdot \mathbb{D}^2(X) = 9 \cdot 5 = 45$.

14.

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{\sigma} \cdot X - \frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} \cdot \mathbb{E}(X) - \frac{\mu}{\sigma} = 0,$$

$$\mathbb{D}^2(Y) = \mathbb{D}^2\left(\frac{1}{\sigma} \cdot X - \frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}\mathbb{D}^2(X) = 1,$$

ezért $\mathbb{D}(Y) = 1$. Y-t az X változó *standardizáltjának* hívjuk.

15. Annak valószínűsége, hogy n ember közül eggyel sem közös a szülinapom $\left(\frac{364}{365}\right)^n$ (szökőéveket nem számolva). Annak valószínűsége, hogy legalább eggyel közös a szülinapom, $1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n$. Ezért keresem azt az n-et, melyre

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n &\geq \frac{1}{2} \\ \left(\frac{364}{365}\right)^n &\leq \frac{1}{2} \\ n \cdot \log_2\left(\frac{364}{365}\right) &\leq -1 \\ n &\geq \frac{1}{\log_2(365) - \log_2(364)} \simeq 252.7, \end{aligned}$$

azaz legalább 253 ember szükséges.

Feladatok és megoldások a 12. gyakorlathoz

Építőkari Matematika A3

1. Az alábbi függvények melyike lehet eloszlásfüggvény?

   (a) $F(x) = \begin{cases} 1 + \mathrm{e}^{1-x} & \text{, ha } x > -1, \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$

   (b) $F(x) = \begin{cases} 2 - \dfrac{2}{x+1} & \text{, ha } x \geq 0, \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$

   (c) $F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{, ha } x \geq 0, \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$

   (d) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } x \leq 0, \\ \dfrac{x}{4} \cdot (4 - x) & \text{, ha } 0 < x \leq 2, \\ 1 & \text{, ha } x > 2 \end{cases}$

2. Az alábbi függvények melyike lehet sűrűségfüggvény?

   (a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x} & \text{, ha } x > 1, \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{2} & \text{, ha } 0 < x < 2, \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} 3^{x-1} \ln(3) & \text{, ha } x \leq 0, \\ \dfrac{1}{3} \sin\left(\dfrac{x}{2}\right) & \text{, ha } 0 < x < \pi, \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$

   (d) $f(x) = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{-2x} & \text{, ha } x > 0, \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$

3. Számítsuk ki az

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{, ha } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$$

   sűrűségfüggvényt követő X valószínűségi változó várható értékét és szórását.

4. Mennyi az előző feladatban a $\mathbb{P}\{m - \sigma < X < m + \sigma\}$ illetve a $\mathbb{P}\{m - 2\sigma < X < m + 2\sigma\}$ valószínűségek értéke, ha m jelöli a várható értéket és σ jelöli a szórást?

5. Tekintsük az

$$f(x) = \begin{cases} c(2x - x^3) & \text{, ha } 0 < x < \dfrac{5}{2}, \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$$

függvényt. Lehet-e f sűrűségfüggvény? Ha igen, milyen c érték esetén?

Ismételjük meg a vizsgálatot az

$$f(x) = \begin{cases} c(2x - x^2) & \text{, ha } 0 < x < \dfrac{5}{2}, \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$$

függvényre.

6. Egy benzinkút hetente egyszer kap benzint. Ha a heti eladás (ezer literben mérve) egy valószínűségi változó

$$f(x) = \begin{cases} 5(1 - x)^4 & \text{, ha } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$$

sűrűségfüggvénnyel, akkor mekkora méretű tartály szükséges ahhoz, hogy egy adott héten a benzinkút 0.01 valószínűséggel fogyjon ki a benzinből?

7. Számoljuk ki $\mathbb{E}(X)$ értékét, ha X sűrűségfüggvénye

   (a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} x \mathrm{e}^{-x/2} & \text{, ha } x > 0, \\ 0 & \text{, egyébként;} \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} c(1 - x^2) & \text{, ha } -1 < x < 1, \\ 0 & \text{, egyébként;} \end{cases}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{x^2} & \text{, ha } x > 5, \\ 0 & \text{, egyébként?} \end{cases}$

8. Egy alkatrész napokban kifejezett élettartamának sűrűségfüggvénye $f(x) = 2/x^3$, ha $x > 1$. Mi annak a valószínűsége, hogy ha január 26-án hoztuk haza a boltból, akkor február 1-én még működik? Érdemesebb-e azt az alkatrészt megvenni, melynek élettartama az $f(x) = 1/x^2$, ha $x > 1$ sűrűségfüggvényt követi? Átlagosan mennyit bír a kétféle alkatrész?

9. Mi a valószínűsége, hogy éjszaka álmomból felriadva a nagymutató az óralap képzeletbeli függőleges középvonalához képest jobbra van? És annak a valószínűsége, hogy a körív 5-ös és 6-os számjegy közötti $\frac{1}{12}$ részén van?

10. Mi a valószínűsége, hogy három független $(0, 1)$-en választott pont közül pontosan 1-1 essen a $(0, \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $(\frac{2}{3}, 1)$ intervallumba?

11. Egy hosszú, magas kerítés egymástól L távolságra leszúrt, D átmérőjű függőleges rudakból áll. Egy d átmérőjű labdát elég messziről, csukott szemmel a kerítés felé dobunk. A labda vagy nekiütődik valamelyik rúdnak, vagy érintés nélkül átrepül közöttük. Mi a valószínűsége annak, hogy a labda a rudak érintése nélkül átrepül a rudak között?

12. A felé a vonatok 15 percenként indulnak 7:00-tól kezdve, míg B felé 15 percenként indulnak 7:05-től kezdve.

(a) Ha egy utas 7:00 és 8:00 közötti egyenletes eloszlású időben érkezik az állomásra, majd felszáll arra a vonatra amelyik hamarabb indul, az esetek hányadrészében megy A felé, és hányadrészében B felé?

(b) És ha az utas 7:10 és 8:10 közötti egyenletes eloszlású időben érkezik az állomásra?

13. Tudjuk, hogy a busz 10:00 és 10:30 közötti egyenletes időben érkezik a megállóba, ezért 10:00-ra a megállóba megyünk.

    (a) Mi a valószínűsége, hogy legalább 10 percet kell a buszra várnunk?

    (b) Ha 10:15-kor még mindig várjuk a buszt, mi a valószínűsége, hogy még legalább 10 percet fogunk a buszra várni?

14. Egy busz A és B városok között jár, mely városok egymástól 100 kilométerre vannak egymástól. Ha a busz lerobban, akkor azt egyenletes eloszlású helyen teszi a két város közötti úton. Pillanatnyilag egy buszszerviz található az A városban, egy a B városban, és egy a két város között félúton. Egy javaslat szerint ehelyett gazdaságosabb lenne a három szervizt az A várostól 25, 50, és 75 kilométerre elhelyezni. Egyetértünk-e a javaslattal? Miért? Mi lenne a szervizek legjobb elhelyezése?

15. Egy l hosszúságú ropit találomra választott pontban ketté törünk. Mi az így keletkezett darabok közül a rövidebbiknek az eloszlásfüggvénye?

16. Egy utcai telefonfülke foglalt, amikor odaérek. A beszélgetés hossza véletlen, percekben mérve 1/3 paraméterű exponenciális eloszlású. Mi a valószínűsége, hogy 5 perc múlva sem kerülök sorra? Mi a helyzet akkor, ha tudjuk, hogy odaérkezésünkkor már 2 perce tart a beszélgetés?

17. Egy TV élettartama években mérve exponenciális eloszlású, $\lambda = 1/8$ paraméterrel. Ha Józsi vesz egy ilyen típusú használt TV-t, mi a valószínűsége, hogy a következő nyolc évben végig működni fog?

18. Adott típusú elektomos berendezések 2%-a 1000 üzemórán belül elromlik. Tegyük fel, hogy a meghibásodásig eltelt idő exponenciális eloszlást követ. Mekkora a valószínűsége, hogy egy ilyen berendezés az átlagosnál tovább működik? Hány óra garanciát vállaljanak, ha garanciális időn belül csak 5% garanciaigényt akarnak kielégíteni?

19. Egy ketyere javítási ideje (órákban mérve) exponenciális eloszlású valószínűségi változó, $\lambda = 1/2$ paraméterrel.

    (a) Mi a valószínűsége, hogy a javítás 2 óránál tovább tart?

    (b) Mi a feltételes valószínűsége, hogy a javítás összesen 10 óránál tovább tart, feltéve, hogy már 9 órája zajlik?

20. Egy örökifjú tulajdonságú villanykörténél 2/3 annak a valószínűsége, hogy 2000 óránál többet üzemel. Egy városban 200 ilyen égőt helyezünk el. Mi a valószínűsége annak, hogy 1000 óra elteltével éppen 150 égő világít?

21. Számítsuk ki a következő valószínűségeket, ha X standard normális valószínűségi változó:

    (a) $\mathbb{P}\{-1 < X < 1\}$

(b) $\mathbb{P}\{-2 < X < 2\}$
(c) $\mathbb{P}\{-3 < X < 3\}$

22. Legyen X egy normális eloszlású valószínűségi változó $\mu = 10$, $\sigma^2 = 36$ paraméterekkel. Határozzuk meg a következő valószínűségeket:

    (a) $\mathbb{P}\{X > 5\}$;
    (b) $\mathbb{P}\{4 < X < 16\}$;
    (c) $\mathbb{P}\{X < 8\}$;
    (d) $\mathbb{P}\{X < 20\}$;
    (e) $\mathbb{P}\{X > 16\}$.

23. Tegyük fel, hogy X normális eloszlású, 5 várható értékkel. Ha $\mathbb{P}\{X > 9\} = 0.2$, közelítőleg mennyi X szórásnégyzete?

24. Tegyük fel, hogy a 25 éves fiatalemberek magassága centiméterben mérve normális eloszlású, $\mu = 180$ és $\sigma^2 = 169$ paraméterekkel. A 25 éves fiatalemberek hány százaléka magasabb 2 méternél? A két méteres klub tagjai közül hány százalék magasabb 2 méter 10 cm-nél?

25. Egy X valószínűségi változó várható értéke 0, szórása 1. Melyik esetben valószínűbb, hogy $X > 1/2$; akkor, ha X eloszlása normális, vagy akkor, ha egyenletes?

26. Legyen f a μ várható értékű és σ^2 szórásnégyzetű normális eloszlás sűrűségfüggvénye. Mutassuk meg, hogy $\mu \pm \sigma$ a függvény két inflexiós pontja.

Eredmények

1.(a) Nem, mert F csökkenő.

(b) Nem, mert $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 2$.

(c) Igen, ez az exponenciális(1) eloszlásfüggvény.

(d) Igen, folytonos, $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$ és F monoton növekvő.

2.(a) Nem, f integrálja végtelen.

(b) Nem, $\int\limits_0^2 \frac{\sin(x)}{2}\,\mathrm{d}x \neq 1$.

(c) Igen, $f(x) \geq 0$, és

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{0} 3^{x-1}\ln(3)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\pi} \frac{1}{3}\sin\Big(\frac{x}{2}\Big)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

(d) Igen, ez az exponenciális(2) eloszlás sűrűségfüggvénye.

3.

$$\mathbb{E}(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} x\cdot 2x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3},$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} x^2\cdot 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$

$$\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2} = \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

4.

$$\mathbb{P}\{m-\sigma < X < m+\sigma\} = \mathbb{P}\Big\{\frac{4-\sqrt{2}}{6} < X < \frac{4+\sqrt{2}}{6}\Big\} = \int\limits_{\frac{4-\sqrt{2}}{6}}^{\frac{4+\sqrt{2}}{6}} 2x\,\mathrm{d}x = \frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

Mivel $m+2\sigma > 1$, az alábbi integrálás felső korlátját le kell vágnunk 1-nél (ahol a sűrűségfüggvény nullává válik):

$$\mathbb{P}\{m-2\sigma < X < m+2\sigma\} = \mathbb{P}\Big\{\frac{2-\sqrt{2}}{3} < X < \frac{2+\sqrt{2}}{3}\Big\} = \int\limits_{\frac{2-\sqrt{2}}{3}}^{1} 2x\,\mathrm{d}x = \frac{3+4\sqrt{2}}{9}.$$

5 Mindkét függvény előjelet vált az intervallum belsejében (az első függvény $\sqrt{2}$-nél, a második 2-nél), egyik sem lehet sűrűségfüggvény.

6. A feladat szerint azt szeretnénk, hogy az X heti eladásra $\mathbb{P}\{X > V\} = 0.01$ teljesüljön, ahol V a tartály kapacitása. A feladathoz meghatározzuk az eloszlásfüggvényt:

$$F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} 5(1-x)^4\,\mathrm{d}x = 1-(1-a)^5, \qquad 0 < a < 1.$$

Ezzel

$$0.01 = \mathbb{P}\{X > V\} = 1 - F(V) = (1-V)^5,$$

vagyis $1 - V = 0.01^{1/5}$, $V = 1 - 0.01^{1/5} \simeq 0.602$.

7.(a) Parciális integrálással

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty x \cdot \frac{1}{4}x\mathrm{e}^{-x/2}\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{1}{4}x^2 \cdot (-2\mathrm{e}^{-x/2})\Big]_0^\infty + \int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x/2}\,\mathrm{d}x$$
$$= [x \cdot (-2\mathrm{e}^{-x/2})]_0^\infty + 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x/2}\,\mathrm{d}x = 4.$$

Trükkösebben, legyen Y egy exponenciális($\frac{1}{2}$) valószínűségi változó. Ekkor a fenti integrál átírható a következőképpen:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}\int_0^\infty x^2 \cdot \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y^2) = \frac{1}{2} \cdot (\mathbb{D}^2(Y) + [\mathbb{E}(Y)]^2) = \frac{1}{2} \cdot (2^2 + 2^2) = 4.$$

(b) 0, mivel a sűrűségfüggvény x-szel szorozva is integrálható, és szimmetrikus az origóra.

(c)

$$\mathbb{E}(X) = \int_5^\infty x \cdot \frac{5}{x^2}\,\mathrm{d}x = [5\ln(|x|)]_5^\infty = \infty.$$

8. Az első alkatrész élettartamának eloszlásfüggvénye

$$F(a) = \int_1^a \frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{a^2}, \qquad a > 1,$$

a második alkatrész esetén

$$F(a) = \int_1^a \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{a}, \qquad a > 1.$$

Annak valószínűsége, hogy hat nap után működnek az alkatrészek $1 - F(6)$ azaz $1/36$ illetve $1/6$. Általában a nap után ez a valószínűség $1-F(a)$, azaz $1/a^2$ illetve $1/a$, nagyobb a második alkatrész esetén, mint az első alkatrésznél. A második alkatrész élettartama *sztochasztikusan dominálja* az első alkatrész élettartamát, érdemes tehát ezt megvenni. Ezt alátámasztja (de nem bizonyítja) a várható értékek kiszámolása is:

$$\mathbb{E}(X) = \int_1^\infty x \cdot \frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x = 2,$$

míg a második alkatrésznél

$$\mathbb{E}(X) = \int_1^\infty x \cdot \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \infty.$$

9. Feltehetjük, hogy a nagymutató egyenletes eloszlású az óra lapján. Ezért annak valószínűsége, hogy a középvonaltól jobbra van 1/2, és annak valószínűsége, hogy a körív 1/12 részén van 1/12.

10. Annak valószínűsége, hogy az első változó az első intervallumba esik, a második változó a második intervallumba esik, és a harmadik változó a harmadik intervallumba esik $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$. Azonban ez megtörténhet bármilyen más sorrendben is, így ezt az eredményt be kell szoroznunk a három változó $3! = 6$ sorrendjével, és a válasz $6/27 = 2/9$.

11. Legyen L a rudak középpontjainak távolsága. Feltesszük, hogy $L > D + d$, ellenkező esetben a valószínűség nulla. A probléma periodicitása miatt elég két szomszédos rúd középpontja között vizsgálódnunk, ahol feltehetjük, hogy a labda középpontjának X vízszintes koordinátája egyenletes eloszlású. A labda ütközik akkor és csak akkor, ha $X < \frac{D+d}{2}$ vagy $X > L - \frac{D+d}{2}$. E két halmaz együttes „hosszúsága” $D + d$, ezért az ütközés valószínűsége $\frac{D+d}{L}$, a válasz pedig $1 - \frac{D+d}{L} = \frac{L-D-d}{L}$.

12.(a) A felé indul az utas, ha érkezési ideje a $(7{:}05,\ 7{:}15] \cup (7{:}20,\ 7{:}30] \cup (7{:}35,\ 7{:}45] \cup (7{:}50,\ 8{:}00]$ halmazba esik. E halmaz „hossza” 40 perc, az A felé indulás valószínűsége tehát $40/60 = 2/3$, B felé pedig az esetek 1/3-ában lesz indulás.

(b) A felé indul az utas, ha érkezési ideje a $[7{:}10,\ 7{:}15] \cup (7{:}20,\ 7{:}30] \cup (7{:}35,\ 7{:}45] \cup (7{:}50,\ 8{:}00] \cup (8{:}05,\ 8{:}10]$ halmazba esik. E halmaz „hossza” ismét 40 perc, az A felé indulás valószínűsége tehát most is $40/60 = 2/3$, és B felé most is az esetek 1/3-ában lesz indulás.

13. Legyen a busz érkezési ideje X.

1. $\mathbb{P}\{X > 10{:}10\} = 20/30 = 2/3$.

2. $\mathbb{P}\{X > 10{:}25 \mid X > 10{:}15\} = \mathbb{P}\{X > 10{:}25\}/\mathbb{P}\{X > 10{:}15\} = \frac{5/30}{15/30} = 1/3$. Megjegyzés: egyenletes eloszlású várakozási idő esetén, feltéve, hogy a várt esemény még nem következett be, a hátralevő várakozási idő is egyenletes lesz (a hátralevő lehetséges intervallumon).

14. Először is tisztáznunk kell, mit jelent az a szó, hogy „gazdaságos” ebben a helyzetben. Egy jó értelmezés lehet lerobbanástól a legközelebbi szervizig mért D távolság várható értékének minimalizálása. Legyen a három szerviz $a < b < c$ távolságra A-tól. Ekkor

$$D = \begin{cases} a - X & \text{, ha } 0 < X < a, \\ X - a & \text{, ha } a < X < [a+b]/2, \\ b - X & \text{, ha } [a+b]/2 < X < b, \\ X - b & \text{, ha } b < X < [b+c]/2, \\ c - X & \text{, ha } [b+c]/2 < X < c, \\ X - c & \text{, ha } c < X < 100. \end{cases}$$

X egyenletes, sűrűségfüggvénye $1/100$ a két város között, így

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(D) = \frac{1}{100}\cdot\Big[&\int_0^a (a-x)\,\mathrm{d}x + \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)\,\mathrm{d}x \\ &+ \int_b^{\frac{b+c}{2}} (x-b)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{b+c}{2}}^c (c-x)\,\mathrm{d}x + \int_c^{100} (x-c)\,\mathrm{d}x\Big] \\ = \frac{1}{100}\cdot\Big[&\frac{a^2}{2} + \frac{(b-a)^2}{4} + \frac{(c-b)^2}{4} + \frac{(100-c)^2}{2}\Big].\end{aligned}$$

A jelenlegi helyzetben $a = 0,\ b = 50,\ c = 100$, és $\mathbb{E}(D) = 12.5$ kilométer. A javasolt elrendezésben $a = 25,\ b = 50,\ c = 75$, és $\mathbb{E}(D) = 9.375$ kilométer, eszerint tehát jobb, mint a jelenlegi elrendezés. Nem nehéz látni, hogy az optimális elrendezés (mely minimalizálja $\mathbb{E}(D)$-t) $a = 50/3 \simeq 16.7,\ b = 50,\ c = 250/3 \simeq 83.3$.

Egy kissé nehezebb, de nem túl nehéz azt sem átgondolni, hogy a javasolt $a = 25,\ b = 50,\ c = 75$ elrendezés *sztochasztikusan jobb* a jelenlegi helyzetnél, azaz $\mathbb{P}\{D < d\}$ minden d-re nagyobb egyenlő a javasolt elrendezésben, mint jelenleg. Érdeklődők azt is beláthatják, hogy az $\mathbb{E}(D)$-t optimalizáló $a = 50/3,\ b = 50,\ c = 250/3$ elrendezés *sztochasztikusan is optimális*, azaz minden d-re egyszerre maximalizálja a $\mathbb{P}\{D < d\}$ valószínűséget. Ez azt jelenti, hogy a javasolt elrendezés nem csak $\mathbb{E}(D)$ tekintetében jobb a jelenleginél, illetve a harmadik elrendezés nem csak $\mathbb{E}(D)$-t optimalizálja, hanem D-nek bármilyen monoton növő $g(D)$ függvényére is $\mathbb{E}(g(D))$ kisebb a javasolt elrendezésben mint jelenleg, illetve a lehető legkisebb a harmadik elrendezésben. Például biztosak lehetünk benne, hogy a javasolt elrendezés a távolság négyzete $\mathbb{E}(D^2)$ várható értékének tekintetében is jobb a jelenleginél, illetve a harmadik elrendezés $\mathbb{E}(D^2)$-et is optimalizálja.

Ezek az állítások a feladat egyszerűségének következményei, bonyolultabb esetekben nem feltétlenül érhető el sztochasztikusan optimális megoldás. Ekkor elképzelhető, hogy valamilyen D célfüggvényre $\mathbb{E}(D)$ az egyik fajta elrendezésben lesz minimális, míg például $\mathbb{E}(D^2)$ egy másikfajta elrendezésben lesz a legkisebb, és külön tisztázni kell, hogy mit jelent a „jó” és a „kevésbé jó” elrendezés.

16. Ha X a beszélgetés hossza, akkor $\mathbb{P}\{X > 5\} = 1 - F(5) = \mathrm{e}^{-5/3}$. Ha már 2 perce tart a beszélgetés, akkor

$$\mathbb{P}\{X > 2+5 \mid X > 2\} = \frac{\mathbb{P}\{X > 2+5\}}{\mathbb{P}\{X > 2\}} = \frac{1 - F(2+5)}{1 - F(2)} = \frac{\mathrm{e}^{-[2+5]/3}}{\mathrm{e}^{-2/3}} = \mathrm{e}^{-5/3} = \mathbb{P}\{X > 5\}.$$

Az egyenlet az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonságát fejezi ki, a feltétel nem befolyásolja a hátralevő idő eloszlását.

17. Az örökifjú tulajdonság miatt a válasz ugyanaz, mintha Józsi új rádiót vásárolna: $\mathbb{P}\{X > 8\} = \mathrm{e}^{-8\cdot 1/8} = \mathrm{e}^{-1}$.

18. Az átlagos működési idő $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$, és annak valószínűsége, hogy ennél tovább működik a berendezés $\mathbb{P}\{X > 1/\lambda\} = \mathrm{e}^{-\lambda\cdot 1/\lambda} = \mathrm{e}^{-1}$, λ értékétől függetlenül. A msodik kérdés megválaszolásához már kell λ értéke, melyet a $\mathbb{P}(X < 1000) = F(1000) = 1 - e^{-\lambda 1000} = 0.02$ egyenlet megoldásával kapunk. Ha g a garanciális idő, akkor $\mathbb{P}(X < g) = 0.05$, azaz $1 - e^{-\lambda g} = 0.05$ egyenletet kell megoldani g-re a kiszámolt λ mellett.

19.(a) $\mathbb{P}\{X > 2\} = \mathrm{e}^{-2\cdot 1/2} = \mathrm{e}^{-1}$.

(b) Az örökifjúság miatt $\mathbb{P}\{X > 10 \,|\, X > 9\} = \mathbb{P}\{X > 9+1 \,|\, X > 9\} = \mathbb{P}\{X > 1\} = \mathrm{e}^{-1\cdot 1/2} = \mathrm{e}^{-1/2}$.

20. Annak a valószínűsége, hogy egy adott égő világít $\mathbb{P}\{X > 1000\} = \mathrm{e}^{-1000\lambda}$. A λ paraméter értékét pedig a megadott adatból számolhatjuk: $\frac{2}{3} = \mathbb{P}\{X > 2000\} = \mathrm{e}^{-2000\lambda}$ amiből

$$p := \mathbb{P}\{X > 1000\} = \mathrm{e}^{-1000\lambda} = [\mathrm{e}^{-2000\lambda}]^{1/2} = \Big(\frac{2}{3}\Big)^{1/2}.$$

Az 1000 óra után világító égők Y száma binomiális, ezzel a p, és $n = 200$ paraméterekkel. Ezért a kérdésre a válasz

$$\mathbb{P}\{Y = 150\} = \binom{200}{150} \cdot p^{150} \cdot [1-p]^{50} = \binom{200}{150} \cdot \Big(\frac{2}{3}\Big)^{75} \cdot \Big[1 - \Big(\frac{2}{3}\Big)^{1/2}\Big]^{50} \simeq 0.00429.$$

21. Általánosan, $x > 0$-ra

$$\mathbb{P}\{-x < X < x\} = \Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi(x) - [1 - \Phi(x)] = 2\Phi(x) - 1.$$

A normális eloszlás táblázatából behelyettesítve $\mathbb{P}\{-1 < X < 1\} \simeq 0.6826$, $\mathbb{P}\{-2 < X < 2\} \simeq 0.9544$, $\mathbb{P}\{-3 < X < 3\} \simeq 0.9974$.

22.(a) $\mathbb{P}\{X > 5\} = 1 - \mathbb{P}\{X \le 5\} = 1 - F(5) = 1 - \Phi\big(\frac{5-10}{6}\big) = 1 - \Phi\big(-\frac{5}{6}\big) = \Phi\big(\frac{5}{6}\big) \simeq 0.7967$;

(b) $\mathbb{P}\{4 < X < 16\} = F(16) - F(4) = \Phi\big(\frac{16-10}{6}\big) - \Phi\big(\frac{4-10}{6}\big) = \Phi(1) - [1 - \Phi(1)] = 2\Phi(1) - 1 \simeq 0.6826$;

(c) $\mathbb{P}\{X < 8\} = F(8) = \Phi\big(\frac{8-10}{6}\big) = \Phi\big(-\frac{1}{3}\big) = 1 - \Phi\big(\frac{1}{3}\big) \simeq 0.3707$;

(d) $\mathbb{P}\{X < 20\} = F(20) = \Phi\big(\frac{20-10}{6}\big) = \Phi\big(\frac{5}{3}\big) \simeq 0.9525$;

(e) $\mathbb{P}\{X > 16\} = 1 - F(16) = 1 - \Phi\big(\frac{16-10}{6}\big) = 1 - \Phi(1) \simeq 0.1587$.

23. Adott, hogy

$$0.2 = \mathbb{P}\{X > 9\} = 1 - F(9) = 1 - \Phi\Big(\frac{9-5}{\sigma}\Big),$$

amiből $\Phi\big(\frac{4}{\sigma}\big) = 0.8$. A táblázatot visszafelé használva $4/\sigma \simeq 0.84$, tehát $\sigma \simeq 4.76$, és a szórásnégyzet $\sigma^2 \simeq 22.7$.

24. Jelöljük a magasságot X-szel, ekkor $\mathbb{P}\{X > 200\} = 1 - F(200) = 1 - \Phi\big(\frac{200-180}{13}\big) \simeq 0.0618$. A második kérdés egy feltételes valószínűség:

$$\mathbb{P}\{X > 210 \,|\, X > 200\} = \frac{\mathbb{P}\{X > 210\}}{\mathbb{P}\{X > 200\}} = \frac{1 - F(210)}{1 - F(200)} = \frac{1 - \Phi\big(\frac{210-180}{13}\big)}{1 - \Phi\big(\frac{200-180}{13}\big)} \simeq 0.168.$$

25. Ha X normális, akkor $\mathbb{P}\{X > 1/2\} = 1 - \Phi(1/2) \simeq 0.309$. Ha X egyenletes, akkor a várható érték és a szórás ismeretében meg kell határoznunk azt az $(\alpha,\, \beta)$ intervallumot, ahol X felveszi az értékeit:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha + \beta}{2} = 0,$$
$$\mathbb{D}(x) = \frac{\beta - \alpha}{2\sqrt{3}} = 1,$$

melyből $\alpha = -\sqrt{3}$, $\beta = \sqrt{3}$. Ezért

$$\mathbb{P}\{X > 1/2\} = \frac{\sqrt{3} - 1/2}{\sqrt{3} - (-\sqrt{3})} \simeq 0.356,$$

nagyobb, mint a normális esetben.

26. Az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

normális sűrűségfüggvény első és második deriváltja

$$f'(x) = \frac{-(x-\mu)}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{illetve} \qquad f''(x) = \frac{-\sigma^2 + (x-\mu)^2}{\sqrt{2\pi}\sigma^5} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

A második deriváltban a mindig pozitív exponenciális tagot egy x-ben másodfokú polinom szorozza, mely a $\mu \pm \sigma$ zérushelyeinél előjelet vált, ezért itt vannak f inflexiós pontjai.