3. heti gyakorlat: Egzakt d.e. és 2. heti elmaradások.

1. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket:
   (a) $2x \cos y + [2y \cos y - (x^2 + y^2) \sin y]\, y' = 0$,
   (b) $xdy + ydx = 0$,
   (c) $\frac{x}{x^2+y^2} y' = \frac{y}{x^2+y^2}$,
   (d) $2x(\sin y + 1) + x^2 \cos y \cdot y' = 0$.
2. Alkalmazza az egzisztencia és unicitási tételt a 2. heti gyakorlat 5. feladatában!
3. Rajzolja le a fázisvonalakat, vázolja az iránymezőt és osztályozza az egyensúlyi megoldásokat:
   (a)
   $$y' = y^4 - 2y^3 - 15y^2$$
   (b)
   $$y' = y^4 + y^3 - 20y^2$$
   (c)
   $$y' = (y - 3)(y + 1)^2$$

Eredmények

1. (a) Az $y' = \frac{dy}{dx}$-et felírva és dx-el mindkét oldalt beszorozva kapjuk, hogy az egyenlet
   $$\underbrace{2x \cos y}_{M(x,y)} dx + \underbrace{\left[2y \cos y - (x^2 + y^2) \sin y\right]}_{N(x,y)} dy = 0$$
   alakú. Mivel
   $$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x} = -2x \sin y,$$
   ezért a differenciálegyenlet egzakt, tehát van olyan $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre
   $$\mathbf{grad}(F) = (M, N).$$
   Vagyis
   $$\frac{\partial F}{\partial x} = M, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = N.$$
   Ezért
   $$F(x, y) = \int M(x, y)dx + h(y) = x^2 \cos y + h(y). \tag{1}$$

A $h(y)$ függvény abból az egyenletből határozzuk meg hogy

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N.$$

Vagyis:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -x^2 \sin y + h'(y) = \underbrace{2y \cos y - (x^2 + y^2) \sin y}_{N}.$$

Innen

$$h'(y) = 2y \cos y - y^2 \sin y.$$

Innen

$$h(y) = y^2 \cos y.$$

Ezt vissza helyettesítve (1)-be adódik, hogy:

$$F(x, y) = (x^2 + y^2) \cos y.$$

Vagyis a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$(x^2 + y^2) \cos y = Const.$$

(b) $xy = Const$, de ez kijön úgy is, ha szétválasztható változójúként kezeljük a feladatot.

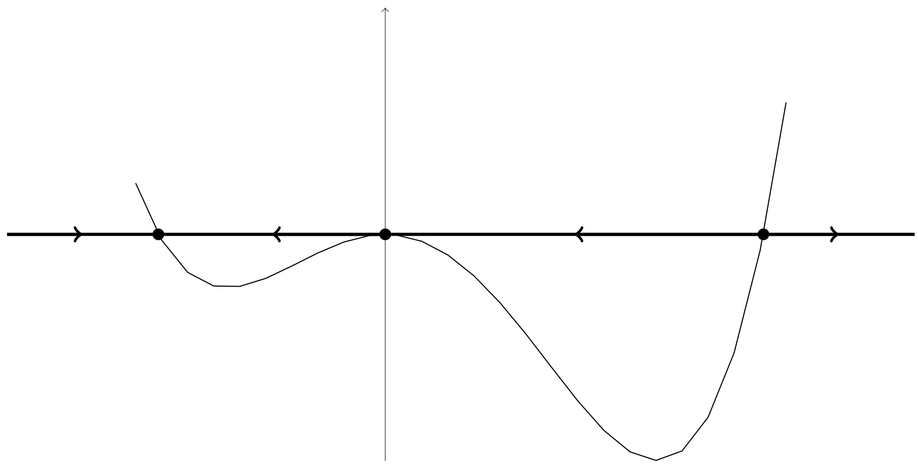
(c) $\arctan \frac{y}{x} = Const \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \tan Const \Leftrightarrow y = Cx$
Megjegyzés: ez sokkal egyszerűbben kijön, ha szétválasztható változójúként kezeljük a feladatot. $x^2 + y^2 \neq 0$, ezért mindkét oldalt beszorozva $x^2 + y^2$-tel a következő szétválasztható d.e. adódik:

$$y' = \frac{y}{x},$$

melynek megoldása $y = Cx$, azaz $\frac{y}{x} = C$, ami ekvivalens az előbbi megoldással.

(d) $x^2 \sin y + x^2 = Const$

3. (a) $f(y)$ gyökeit és előjelét nézve: $y = -3$: aszimptotikusan stabil, $y = 0$: félig stabil, $y = 5$: instabil egyensúlyi megoldás.



3. gyakorlat.

1. Példa. Egy testre ható közegellenállási erő arányos a test sebességével. Írjuk fel a d.e. - et és vizsgáljuk a megoldásokat a végtelenben.

2. Példa. $y' = e^y,\ y' = 1 - e^y,\ y' = 1 - e^{-y},\ y' = \tan y,\ y' = \frac{y-1}{y+1},\ y' = y \ln y.$

3. Példa. Készítsünk olyan autonóm d.e. - et, melynek -1 és 5 stabil, 0 félig stabil és 1 instabil egyensúlyi pontjai!

4. Példa.

- $(2x + y^2) + 2xyy' = 0, \qquad (x^2 + xy^2 = c);$
- $(y \cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2e^y - 1)dy = 0, \qquad (y \sin x + x^2e^y - y = c);$
- $(2xy - 3x^2)dx + (x^2 - 2y)dy = 0, \qquad (x^2y - x^3 - y^2 = c).$