1. Előszó

Ez a jegyzet a BME Építőmérnök hallgatóinak számára az A3 előadáshoz készült. Ennek a tárgynak előfeltétele az A1 tárgy, ami az egy változós kalkulus, és az A2 tárgy, ami a többváltozós kalkulusból és a lineáris algebrából áll.

A matematika talán legtöbbet alkalmazott ágai a

- valószínűségszámítás és statisztika,
- a differenciálegyenletek elmélete,
- az operáció kutatás.

Ezek közül az első kettővel foglalkozunk az A3 tárgy keretein belül. Pontosabban, az idő rövidsége miatt nincs esély matematikai statisztikával foglalkozni és differenciálegyenletek elméletből csak az úgynevezett közönséges differenciálegyenletekkel foglalkozunk. A parciális differenciálegyenleteket a hallgatók az MSc matematika előadásomon hallgathatják majd.

2. Valószínűségszámítás

Véletlen események tanulmányozunk. Elvben végtelen sokszor azonos körülmények között megismételhető kísérleteket tekintünk. Ilyen például az, hogy

(a) feldobunk egy szabályos kockát, vagy

(b) felteszünk 1 \$-t a ruletten a fehér színre.

Nem tudjuk mi lesz az eredmény. Azt azonban tudjuk, hogy ha ezen kísérleteket egymástól függetlenül nagyon sokszor megismételjünk, akkor bizonyos szabályosságokat tapasztalunk. A fenti (a) esetben a dobott számok átlaga az $1 + 2 + \cdots + 6/6 = 3.5$-höz tart. (Ez a nagy számok törvényéből következik.) A valószínűségszámítás egyik legfontosabb tételének, a Centrális Határeloszlás Tételnek (CLT) az alkalmazásával kapunk információt arra, hogy milyen gyors ez a konvergencia. Ugyanezen tétel alkalmazásából kapjuk, hogy a fenti (b) kísérlet esetén, vagyis ha mindig 1\$-teszünk a fehérre a rulette-en, akkor 99% valószínűséggel, a kaszinó 10 ezer játék után legalább 296\$-t nyer rajtunk. Tanulunk olyan módszereket, mellyel meg válaszolhatjuk a következő természetes kérdéseket:

1. Valaki ideálisan 150 vendéget szeretne az általa adott partin. Tudja, hogy akiket meghív $p = 0.3$ valószínűséggel jönnek el. Tegyük fel, hogy 450 embert hív meg. Mi a valószínűsége, hogy 150-nél több vendége lesz? (Válasz 0.0559... vagyis kevesebb mint 6%)

2. Pista bácsi horgászni megy minden vasárnap délután 2-4 óráig. Megfigyelte, hogy az esetek harmadában nem fog egy halat sem. Mi a valószínűsége, hogy most vasárnap pontosan két halat fog? (Válasz: 0.201158 vagyis k.b. 20%). Tehát aki az esetek harmadában semmit sem fog az esetek k.b. ötödében fog pontosan két halat.

De MIÉRT? Nahát ezt is meg fogjuk tanulni. De előbb ki kell dolgoznunk eszközöket mert eszközök nélkül csak primitív dolgokat lehet létrehozni. Ezek az eszközök a valószínűségszámítás legelemibb fogalmai, amik nélkül semmire sem mehetünk.

2.1. Elemi események, események, eseménytér

Olyan kísérleteket fogunk tekinteni melyek eredmény előre biztosan nem mondható meg de előre ismerjük a kísérlet lehetséges eredményeinek a halmazát. Az összes lehetséges kimenetelek halmazát fogjuk *eseménytérnek* hívni (sokszor S-el jelöljük, míg némely más helyeken Ω-val is jelölik) és magukat a kísérlet lehetséges kimeneteleit pedig *elemi eseményeknek* hívjuk. Az eseménytér egy tetszőleges részhalmazát *eseménynek* nevezzük. Az eseményeket nagy betűkkel jelöljök mint $A, B, C, D, E, F, \dots$.

1. PÉLDA: 1. Ha a kísérlet kimenetele egy lóverseny eredménye, amely lóversenyen 4 ló vesz részt $L1, L2, L3, L4$ néven, akkor az eseménytér

$$S = \{ \text{ mind a 4! permutációja az } L1, L2, L3, L4\text{-nek } \} .$$

2. Ha kísérlet az, hogy feldobunk két érmét, akkor az eseménytér:

$$S = \{(f, f), (f, i), (i, f), (i, i)\} .$$

3. Ha a kísérlet az, hogy megmérjük egy tranzisztor élettartamát órában, akkor az eseménytér

$$S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

4. Ha a kísérlet az, hogy a mai napi előadás leírása során hány gépelési hibát vétettem összesen, akkor az eseménytér megint csak
$$S = \{0, 1, 2, 3, \ldots N\}\,,$$
ahol N a leütött betűk száma.

Az események tehát az eseménytér részhalmazai. Például, ha a kísérlet az, hogy feldobunk egy kockát, akkor a következők (is) események:
$A = \{2, 4, 6\}$ páros számot dobunk,
$B = \{1, 3, 5\}$ páratlan számot dobunk,
$C = \{4, 5, 6\}$ 3-nál nagyobb számot dobunk,
$D = \{3, 6\}$ 3-al osztható számot dobunk,
$E = \{3, 4, 5, 6\}$ 2-nél nagyobb számot dobunk,
$F = \{4, 6\}$,
$G = \{2\}$.

1. Az A és a B események közül az egyik biztos, hogy bekövetkezik és biztos, hogy csak az egyik következik be. Az ilyen eseményekre azt mondjuk, hogy *egymás komplementumai*. Jelben: $\overline{A} = B, \overline{B} = A$. Néha azt a jelölést is használjuk erre, hogy $A^c = B$ és $B^c = A$.

2. Az E esemény pontosan akkor következik be ha a C és a D események közül legalább az egyik (lehet, hogy mind a kettő) bekövetkezik. Ekkor azt mondjuk, hogy az E esemény az A és a B események *összege* vagy *egyesítése* (uniója) jelben $E = C + D$ vagy $E = C \cup D$.

3. Az F esemény pontosan akkor következik be, ha mind az A, mind a C események bekövetkeznek. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az F esemény az A és a C események *szorzata* vagy metszete jelben $F = A \cdot C$ vagy $F = A \cap C$.

4. A G esemény pontosan akkor következik be, mikor az A bekövetkezik, de a C esemény nem következik be. Ekkor azt mondjuk, hogy a G esemény az A és a C események különbsége. Jelben: $G = A - C$ vagy $G = A \setminus C$.

5. B és az F egyidejűleg soha nem következhetnek be. Őket *egymást kizáró eseményeknek* hívjuk.

6. Ha F bekövetkezik, akkor az A is bekövetkezik. Ekkor azt mondjuk, hogy F *maga után vonja* az A-t. Jelben $F \subset A$.

2.2. Események valószínűsége

Olyan eseményeknek esetén beszélhetünk az esemény valószínűségéről, amely események elvben végtelen sokszor azonos körülmények között megismételhetőek. Ha egy ilyen A eseményt n-szer (azonos körülmények között) megismétlünk és n_A-val jelöljük azon kimenetelek számát, amikor az A esemény bekövetkezett akkor az

$$\frac{n_A}{n}$$

hányados (amit *relatív gyakoriságnak* hívunk) egy bizonyos számhoz fog minden határon túl közelíteni. Ez a szám az A *esemény valószínűsége*, és $P(A)$-val jelöljök.

2.2.1. A valószínűség axiómái

1. axióma $0 \leq P(E) \leq 1$ minden E eseményre.

2. axióma $P(S) = 1, P(\emptyset) = 0$, ahol S az eseménytér, és $\emptyset$ a lehetetlen esemény.

3. axióma Ha $A = A_1 + \cdots + A_k + \cdots$ és $A_i \cdot A_j = \emptyset$ minden $i \neq j$-re, akkor

$$P(A) = P(A_1) + \cdots P(A_k) + \cdots .$$

2.2.2. A valószínűség néhány egyszerű tulajdonsága

T1 $P(E^c) = 1 - P(E)$.

T2 Ha $E \subset F$, akkor $P(E) \leq P(F)$.

T3 $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cdot F)$.

T4 $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cdot B) - P(B \cdot C) - P(C \cdot A) + P(A \cdot B \cdot C)$.

T5 Ha egy kísérletnek csak véges sok kimenetele lehet, és ezek mind azonos valószínűséggel következnek be, akkor egy E esemény valószínűségére:

$$P(E) = \frac{E\text{-beli elemi események száma}}{\text{az összes elemi események száma}}$$

3. Feltételes valószínűség

2. PÉLDA: Egy bűnügyi nyomozó a nyomozás egy bizonyos szakaszában 60%-ig biztos abban, hogy az egyik gyanúsított, Kovács úr a tettes. Tegyük fel, hogy ezután egy eddig ismeretlen *új* információ birtokába jut a nyomozó. Nevezetesen kiderül, hogy az elkövető dohányzik, és az is ismert, hogy minden ötödik ember dohányos abban a közösségben ahol ez a történet játszódik. Kérdés hány százalékig lehet biztos Kovács úr bűnösségében mostantól a nyomozó, ha tudja, hogy Kovács úr is dohányzik?

1. DEFINÍCIÓ: Legyen B egy olyan esemény, melyre $P(B) \neq 0$. Az A eseménynek a B eseményre vonatkozó feltételes valószínűsége (jelben $P(A|B)$) azt fejezi ki, hogy azon eseteknek amikor a B esemény bekövetkezik hányad részében következik be az A esemény is. Képletben:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}. \tag{1}$$

3. PÉLDA: Tekintsük azt a kísérletet, hogy van két szabályos kockánk. Az egyiket első kockának, a másikat második kockának nevezzük el. Egyszerre dobunk velük úgy, hogy a két kocka dobása egymástól független. Ekkor az eseménytér

$$S = \{(i,j) : 1 \leq i \leq 6,\ 1 \leq j \leq 6\}.$$

(Lásd 3. Ábra.) Tekintünk két eseményt:

$$\begin{aligned} A &= \{ \text{ első kocka dobás eredménye} < \text{ második kocka dobás eredménye } \} \\ &= \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\} \\ &\cup \{(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)\} \end{aligned}$$

és

$$B := \{ \text{ dobott számok összege} = 6\} = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$$

Tehát

$$\#A = 15, \quad \#B = 5 \ \text{ és } \#(A \cap B) = 2,$$

ahol $\#H$ jelöli egy tetszőleges (véges) H halmaz elemeinek számát. Ezért tehát

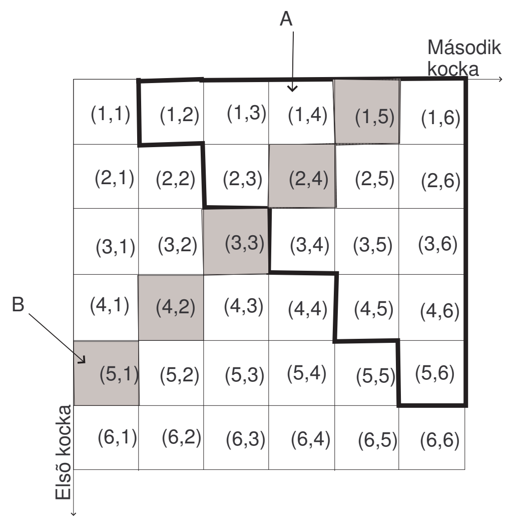
$$P(A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}, \quad P(B) = \frac{5}{36} \text{ és } P(A \cdot B) = \frac{2}{36}.$$

Alkalmazva az (1)-es formulát:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5} < \frac{5}{12} = P(A).$$

Hasonlóan

$$P(A^c|B) = \frac{P(A^c \cdot B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{3}{5}$$



1. ábra. $A = \{$első kocka dobás $<$ második kocka dobás$\}$(A =vastag vonallal határolt terület), $B = \{$ A dobott számok összege=6$\}$. $P(A) = \frac{15}{36}$. $P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \frac{2}{5} = \frac{4}{10}$.

3.1. Szorzási szabály

4. PÉLDA: Tegyük fel, hogy egy urnában van 8 piros és 4 fehér golyó. Kihúzunk két golyót véletlenszerűen visszatevés nélkül. Mi a valószínűsége, hogy mind a kettő kihúzott golyó piros lesz?

Megoldás: Legyen R_1 és R_2 az az esemény, hogy az első és a második kihúzott golyó piros.

$$P(R_1) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \text{ és } P(R_2|R_1) = \frac{7}{11}.$$

Ezért

$$P(R_1 \cdot R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2|R_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{11} = \frac{14}{33}.$$

1. TÉTEL: (Szorzási szabály)

$$P(E_1 E_2 \cdots E_n) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1 E_2) \cdots P(E_n|E_1 \cdots E_{n-1}).$$

5. PÉLDA: A szokásos 52 lapos kártyát 4 játékos között 13 lapos részre szétosztunk alapos keverés után. Kérdés: mi a valószínűsége, hogy mindenki pontosan egy ászt kap?

Ebben az 52 lapos kártyában 4 szín van: treff, káró, kőr, pikk. Minden színben 13 figura: Ász, 2,3,4,5,6,7,8,9,10,J,Q,K

Megoldás: Definiáljunk négy eseményt, melyeket E_1, E_2, E_3, E_4-nek hívunk:

$$E_1 = \{ \text{ Treff ász valamelyik játékosnál van. } \}$$

$$E_2 = \{ \text{ A treff és a pikk ászok különböző játékosoknál vannak. } \}$$

$$E_3 = \{ \text{ A treff a pikk, a káró ászok különböző játékosoknál vannak. } \}$$

$$E_4 = \{ \text{ Mind a négy ász más-más játokosnál van. } \}$$

Nyílván:

$$P(E_1) = 1.$$

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_2 E_1)}{P(E_1)} = \frac{P(E_2 E_1)}{1} = P(E_2) = \frac{39}{51}$$

Ez abból következik, hogy ha a treff ász mondjuk Pista kezében van, akkor az E_2 pontosan akkor következik be, ha a pikk ász bárki más kezében van. A többi játékos kezében 39 lap van (ez tehát a kedvező esetek száma). A Pista kezében lévő treff ászon kívül még 51 lap van (ez jelenti az összes lehetőséget a pikk ász lehetséges helyeire vonatkozóan). Mivel minden lehetőség egyenlően valószínű, ezért

$$P(E_2) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}} = \frac{39}{51}.$$

Ugyanezen megfontolással látható, hogy

$$P(E_3|E_1E_2) = \frac{26}{50}.$$

Ugyanis ha feltesszük, hogy E_1 és E_2 bekövetkezik vagyis, hogy a treff és a pikk ászok két különböző játékosnál (mondjuk Pistánál és Jóskánál) vannak, akkor az, hogy E_3 bekövetkezik azt jelenti, hogy a káró ász a másik két játékos valamelyikének a kezében van. Mivel a másik két játékosnál együtt 26 kártya van ezért a kedvező esetek száma 26. Az összes esetek száma a káró ász elhelyezkedésére pedig 50 hiszen az 52 lap közül bárhol lehet csak a treff és a pikk ászok helyén nem. Ugyanígy látjuk, hogy:

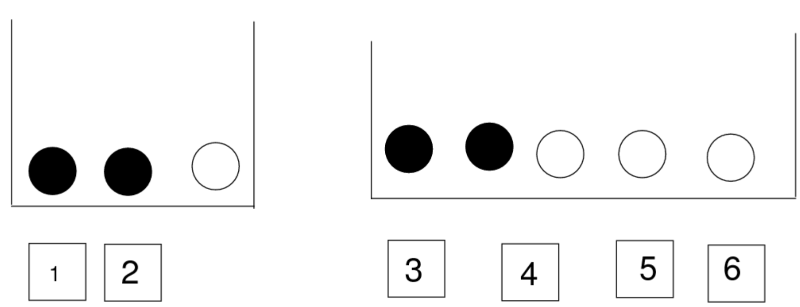
$$P(E_4|E_1E_2E_3) = \frac{13}{49}.$$

Ezeket összetéve és a szorzási szabályt alkalmazva:

$$P(E_1E_2E_3E_4) = P(E_4|E_1E_2E_3)P(E_3|E_1E_2)P(E_2|E_1)(E_1) = \frac{39 \cdot 26 \cdot 13}{51 \cdot 50 \cdot 49} \approx 0.105.$$

Tehát az esetek körülbelül 10%-ban történik meg, hogy mind a négy ász különböző játékosokhoz jut.

3.2. Teljes valószínűség tétele



2. ábra. Ha a kocka dobás eredménye 1 vagy 2, akkor a bal oldali urnából húzunk egy golyót. Ha a kockadobás eredménye legalább három, akkor a jobboldali urnából húzunk egy golyót.

6. PÉLDA: Adva van két urna. (l. 3.2. ábra.) A bal oldaliban három golyó vannak, melyek közül kettő fekete és egy fehér. A jobb oldaliban öt golyó van, melyek közül kettő fekete és három fehér. A kísérlet az, hogy először feldobunk egy szabályos kockát. Ha ez 1-et vagy 2-öt eredményez,akkor a baloldali urnából választunk véletlenszerűen egy golyót. Ha a kockadobás eredménye $3, 4, 5, 6$, akkor a jobboldali urnából választunk véletlenszerűen egy golyót. Mi annak a valószínűsége, hogy fekete golyót húzunk?

Megoldás:
$B_1 = \{$ A baloldali úrnából húzunk $\}$
$B_2 = \{$ A joboldali úrnából húzunk $\}$
$A = \{$ A kihúzott golyó fekete $\}$
Valójában mi arra vagyunk kiváncsiak, hogy $P(A) =?$ Csakhogy amit azonnal fel tudunk írni, hogy

$$P(B_1) = \frac{1}{3}, \quad P(B_2) = \frac{2}{3}, \quad P(A|B_1) = \frac{2}{3}, \quad P(A|B_2) = \frac{2}{5}.$$

Ekkor viszont

$$\begin{aligned} P(A) &= \underbrace{P(A \cdot B_1)}_{P(A|B_1)P(B_1)} + \underbrace{P(A \cdot B_2)}_{P(A|B_2)P(B_2)} = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = 0.4888888889\ldots \end{aligned}$$

Ennek a megoldásnak a lényegét fogja meg a következő tétel:

2. TÉTEL: (A teljes valószínűség tétele) Tegyük fel, hogy a $B_1, B_2, \ldots$ események teljes eseményrendszert alkotnak. Vagyis

$$\forall i \neq j : B_i \cdot B_j = \emptyset \text{ és } B_1 + B_2 + B_3 \cdots = S \text{ (ahol } S \text{ a biztos eseméy)} . \quad (2)$$

Ekkor tetszőleges A eseményre:

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + P(A|B_3) \cdot P(B_3) + \cdots$$

3.3. Bayes Tétel

Tekintsük megint a 6. Példában leírt kísérletet. Vagyis először feldobunk egy kockát. A dobás eredményeképpen döntjük el, hogy a baloldali vagy a jobboldali urnából választjuk a golyót véletlenszerűen. Képzeljünk el valakit aki nem volt jelen ezen kísérlet végrehajtásakor, és aki csak azt tudja, hogy a kísérlet eredményeképpen fehér golyót húztunk. Az illetőnek ki kellene találni, hogy melyik urnából húztuk a fehér golyót. Persze biztosra nem tudja megmondani, mert mind a kettőből húzhattuk. Melyik a urna a valószínűbb?

Megoldás: Legyen
$B_1 = \{$ A baloldali úrnából húzunk $\}$
$B_2 = \{$ A joboldali úrnából húzunk $\}$
$C = \{$ A kihúzott golyó fehér $\}$

Ekkor $P(B_1|C)$ az a valószínűség, hogy a baloldali urnából húztunk, feltéve, hogy tudjuk, hogy végül is fehér golyót húztunk és $P(B_2|C)$ az a valószínűség, hogy a jobboldali urnából húztunk feltéve, hogy fehér golyót húztunk.

$$P(B_1) = \frac{1}{3}, \quad P(B_2) = \frac{2}{3}, \quad P(C|B_1) = \frac{1}{3}, \quad P(C|B_2) = \frac{3}{5}.$$

A következő kifejezés második egyenlőségének a nevezőjében a fent tanult teljes valószínűség tételét alkalmazva:

$$\begin{aligned} P(B_1|C) &= \frac{P(CB_1)}{P(C)} = \frac{P(B_1)P(C|B_1)}{P(C|B_1)P(B_1) + P(C|B_2)P(B_2)} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}} = \frac{5}{23} = 0.217\ldots \end{aligned}$$

Hasonlóan:

$$\begin{aligned} P(B_2|C) &= \frac{P(CB_2)}{P(C)} = \frac{P(B_2)P(C|B_2)}{P(C|B_1)P(B_1) + P(C|B_2)P(B_2)} \\ &= \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}} = \frac{18}{23} = .782\ldots \end{aligned}$$

Tehát ha csak azt tudjuk a kísérletről, hogy annak eredménye fehér golyó volt, akkor sokkal valószínűbb, hogy ez a jobboldali urnából került ki mint az, hogy a baloldali urnából.

Ennek a példának a gondolatmenetét fogja meg a következő tétel:

3. TÉTEL: (Bayes Tételel) Tegyük fel, hogy a $B_1, B_2, \ldots$ események teljes eseményrendszert alkotnak. Vagyis

$$\forall i \neq j : B_i \cdot B_j = \emptyset \text{ és } B_1 + B_2 + B_3 \cdots = S \text{ (ahol } S \text{ a biztos eseméy) .}$$

Ekkor tetszőleges A eseményre és minden k-ra:

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A|B_k)}{\sum\limits_i P(B_i) \cdot P(A|B_i)}. \tag{3}$$

Vegyük észre, hogy a jobboldalon a számláló éppen $P(A \cdot B_k)$. Ha a nevezőben alkalmazzuk a teljes valószínűség tételét, akkor látjuk, hogy a nevező pedig $P(A)$-val egyenlő. Tehát a jobboldali tört értéke $P(A \cdot B_k)/P(A)$, ami definíció szerint $P(B_k|A)$-val egyenlő.

1. MEGJEGYZÉS: Az ilyen feladatok megoldása során a legfontosabb nehézséget az okozza, hogy nekünk kell kitalálni azt, hogy a véletlen jelenséget hogyan válasszuk. Ez sok esetben nehéz.

Most megoldjuk a 2. Példát. Először is megismételjük a Példa szövegét:

Egy bűnügyi nyomozó a nyomozás egy bizonyos szakaszában 60%-ig biztos abban, hogy az egyik gyanúsított, Kovács úr a tettes. Tegyük fel, hogy ezután egy eddig ismeretlen *új* információ birtokába jut a nyomozó. Nevezetesen kiderül, hogy az elkövető dohányzik, és az is ismert, hogy minden ötödik ember dohányos abban a közösségben ahol ez a történet játszódik. Kérdés hány százalékig lehet biztos Kovács úr bűnösségében mostantól a nyomozó?

Ez egy nem könnyű feladat. A nehézség abban áll, hogy a véletlen jelenségeket ügyesen kell megválasztanunk. Amint ezt megtettük, a Bayes tétel azonnal megoldja a feladatot.

2. Példa Megoldása: Definiáljuk a B (mint bűnös) és D (mint dohányzik) eseményeket mind kettőt Kovács úrra vonatkoztatva és a B mint bűnös eseményt.

$$B = \{ \text{ Kovács úr bűnös } \}$$

$$D = \{ \text{ Kovács úr dohányzik } \}$$

Azt, hogy mostantól a nyomozó mennyire gyanakszik Kovács úrra a

$$P(B|D)$$

valószínűség mutatja meg. Ugyanis ez az a valószínűség, hogy Kovács úr az elkövető feltéve, hogy Kovács úr dohányzik. Most írjuk le azt amit a feladatból tudunk a feltételes és nem feltételes valószínűségek nyelvén:

1.

$$P(D|B) = P\Big\{ \text{ Kovács úr dohányzik feltéve, hogy Ő a bűnös } \Big\} = 1.$$

Hiszen tudjuk, hogy az elkövető dohányzik.

2. Azt is tudjuk, hogy

$$P(D|B^c) = P(\text{ Kovács úr dohányzik feltéve, hogy nem bűnös }) = 0.2$$

hiszen az adott népesség minden ötödik egyede, vagyis 20%-a dohányzik.

3.

$$P(B) = P(\text{ Kovács úr bűnös }) = 0.6$$

hiszen a nyomozó (a dohányzással kapcsolatos információ **nélkül**) 60%-ban biztos abban, hogy Kovács úr az elkövető.

4. Ekkor értelemszerűen

$$P(B^c) = 0.4.$$

Tehát a Bays tételt alkalmazva a

$$\{B,\ B^c\}$$

teljes esemény rendszerre és a D eseményre:

$$\begin{aligned} P(B|D) &= \frac{P(B \cdot D)}{P(D)} = \frac{P(B) \cdot P(D|B)}{P(B) \cdot P(D|B) + P(B^c) \cdot P(D|B^c)} \\ &= \frac{0.6 \cdot 1}{0.6 \cdot 1 + 0.4 \cdot 0.2} = 0.882. \end{aligned}$$

Vagyis a nyomozó ezután 88.2%-ban lesz biztos abban, hogy Kovács úr az elkövető, és **NEM** pedig $60\% + 20\% = 80\%$-ban.

7. PÉLDA: Egy repülőgép lezuhant az első a második vagy a harmadik régiók valamelyikében. Annak valószínűségei, hogy melyik régióban zuhant le $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$. Az i-edik régióban annak valószínűsége, hogy a gépet megtalálják feltéve, hogy a gép ezen régióban van $1 - \beta_i$. Mi annak a valószínűsége, hogy a gép az i-edik régióban van feltéve, hogy az első régióban a keresés eredménytelen volt?

Megoldás: Legyen $i = 1, 2, 3$-ra

$$R_i = \{ \text{ A gép az } i\text{-edik régióban van } \}$$

$$E = \{ \text{ Az első régióban a keresés erdménytelen } \}$$

A feladat kérdése, hogy határozzuk meg

$$P(R_1|E) =?, \qquad P(R_2|E) =? \qquad P(R_3|E) =?$$

A Bayes tétel használatával:

$$\begin{aligned} P(R_1|E) &= \frac{P(ER_1)}{P(E)} = \frac{P(E|R_1)P(R_1)}{\sum\limits_{i=1}^{3} P(E|R_i)P(R_i)} \\ &= \frac{\frac{1}{3}\beta_1}{\frac{1}{3}\beta_1 + 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\beta_1}{\beta_1 + 2}. \end{aligned}$$

Ha $j = 2, 3$

$$\begin{aligned} P(R_j|E) &= \frac{P(E \cdot R_j)}{P(E)} = \frac{P(E|R_j)P(R_j)}{P(E)} \\ &= \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\beta_1 \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{\beta_1 + 2} \end{aligned}$$

4. Események függetlensége, Valószínűségi változók

4.1. Független események

Ha fel dobunk egy kockát és egy érmét, akkor a kocka dobás eredményének ismeretében semmilyen információt nem kapunk az érme dobás eredményére. Ezt úgy fejezzük ki, hogy a fenti **két esemény *független*** egymástól.

2. DEFINÍCIÓ: Adottak az A és B események, úgy hogy $0 < P(B) < 1$. Azt mondjuk, hogy az A és a B események *függetlenek*, ha

$$P(A) = P(A|B) = P(A|B^c). \tag{4}$$

Ha $P(B) = 0$ vagy $P(B) = 1$, akkor az A és B eseményeket mindenképpen függetleneknek mondjuk.

Vagyis ha elvégeznénk a kísérletet nagyon sokszor és megszámolnánk, hogy

1. az esetek hányad részében következett be A (ez lesz a $P(A)$ egy közelítése)

2. azon eseteknek, amikor a B bekövetkezett hányad részében következett be a B-vel együtt az A is (ez lesz a $P(A|B)$ egy közelítése),

Az A és B függetlensége ezen két arány egyezését jelenti.

4. TÉTEL: Az A és a B események pontosan akkor függetlenek, ha

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \tag{5}$$

Bizonyítás. Ha A és B függetlenek, akkor

$$P(A) = P(A|B).$$

Viszont a feltételes valószínűség definíciójából:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}.$$

Ezeket összeolvasva

$$P(A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}.$$

Innen B-vel átszorova:

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cdot B).$$

A másik irány bizonyítása hasonlóan megy. ■

5. TÉTEL: Ha az A és B eseményekre teljesül, hogy kizárják egymást, vagyis $A \cdot B = \emptyset$ és $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$, akkor az A és a B események semmi esetre sem lehetnek függetlenek.

Bizonyítás. $P(A \cdot B) = 0$ hiszen A és B kizárják egymást. Másrészt $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$ tehát $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) \neq 0$. ■

3. DEFINÍCIÓ: Azt mondjuk, hogy az

$$A_1, A_2, A_3, \ldots$$

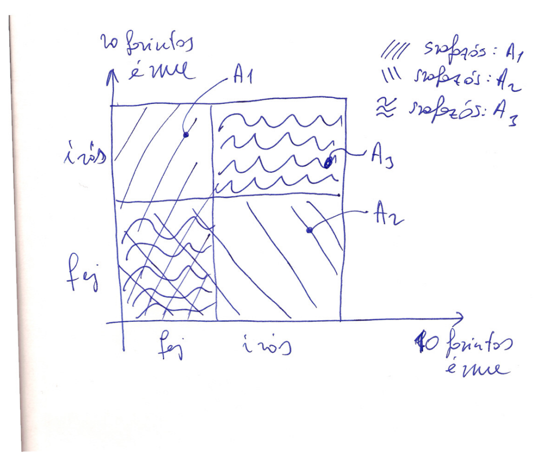
események sorozata független, ha minden k-ra az A_{k+1} esemény független az $A_1, \ldots, A_k$ eseményektől.

6. TÉTEL: AZ $A_1, A_2, A_3, \ldots$ események sorozata pontosan akkor független ha minden k-ra és $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$-ra

$$P(A_{i_1} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k}).$$

8. PÉLDA: Dobunk egy 10 forintos és egy 20 forintos érmével. Definiáljuk a következő eseményeket:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{ \text{ a 10 forintos érme dobás eredménye fej } \} \\
A_2 &= \{ \text{ a 20 forintos érme dobás eredménye fej } \} \\
A_3 &= \{ \text{ Vagy mind a kettő dobás fej vagy mind a kettő írás } \}
\end{aligned}$$



3. ábra. A_1,A_2,A_3 páronként függetlenek, de együttesen nem függetlenek.

Az nyilvánvaló, hogy A_1 független A_2-től. Továbbá

$$P(A_3|A_1) = P(A_3) = \frac{1}{2}, \quad P(A_3|A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}.$$

Tehát A_3 is független mind az A_1-től mind az A_2-től. Vagyis az A_1, A_2, A_3 események **páronként** függetlenek. Viszont

$$A_3 = A_1 \cdot A_2 + A_1^c \cdot A_2^c$$

tehát az A_3 nem független az $\{A_1, A_2\}$ esemény pártól hiszen ha az A_1, A_2 események kimenetelét ismerjük, abból egyértelműen megmondható, hogy A_3 bekövetkezett-e. Ha 3. Ábrára nézünk látjuk, hogy

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3).$$

4.2. Valószínűségi változók

Gyakran előfordul, hogy egy kísérlet során nem a kísérlet kimenetele érdekel hanem annak valamilyen függvénye. Például ha feldobunk két kockát lehet, hogy csak az érdekel bennünket, hogy mennyi a két kocka dobás eredményeinek összege, de az nem érdekel minket, hogy ez az összeg milyen kimenetelek eredményeként realizálódik. Vagyis az mindegy számunkra hogy az egyik kockával 1-et a másik kockával 5-öt dobva értük el, hogy a két kocka dobás összege 6, vagy úgy értük ezt el, hogy az egyik kockával 2-öt a másikkal meg 4-et dobtunk. Ebben az esetben a két kockával dobott számok összege egy úgy nevezett valószínűségi változó.

4. DEFINÍCIÓ: Az eseménytéren értelmezett függvényeket valószínűségi változóknak hívjuk. Rendszerint X, Y, Z-vel jelölöm őket. Másutt kis görög betűkkel mint például ξ, η, ζ jelölik őket.

2. MEGJEGYZÉS: A matematikában az eseménytéren értelmezett úgy nevezett Borel mérhető függvényeket hívjuk valószínűségi változóknak.

5. DEFINÍCIÓ: Azokat a valószínűségi változókat melyek véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok különböző értéket vehetnek fel diszkrét valószínűségi változóknak hívjuk.

9. PÉLDA: 1. Legyen a kísérlet az, hogy két kockával dobunk és az érdekel minket, hogy mennyi a dobott számok összege. Ekkor az eseménytér

$$S := \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6\}$$

és a valószínűségi változó:

$$X(i, j) = i + j.$$

2. János a barátjával azt a játékot játsza, hogy feldobnak egy kockát és ha ennek eredménye $\{1, 2\}$, akkor János fizet 2 forintot a barátjának míg ha a kocka dobás eredménye $\{3, 4, 5, 6\}$, akkor János kap 1 forintot a barátjától. Ekkor János szempontjából csak az érdekes mennyi pénzt fog kapni vagy mennyit kell fizetnie. A valószínűségi változó tehát János szempontjából a nyeremény (ami negatív ha veszteség). Ez pedig az $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ eseménytéren a következő függvény:

$$Y(i) = \begin{cases} -2, & \text{ha } i \in \{1, 2\}; \\ 1, & \text{ha } i \in \{3, 4, 5, 6\}. \end{cases}$$

3. Pista és Kati barátok. Az érdekel, hogy mennyi időt kell várni amíg először megcsörren valamelyiknek a mobil telefonja. Az nem érdekel melyiké. Itt a valószínűségi változó a várakozási idő intervallum hossza. Ennek értékkészlete a nemnegatív valós számok halmaza. Ez a valószínűségi változó már (előbbiekkel ellentétben) NEM diszkrét valószínűségi változó.

4.3. Függetlenség valószínűségi változókra

6. DEFINÍCIÓ: Azt mondjuk, hogy az $X_1, X_2, \dots$ valószínűségi változók függetlenek, ha minden $B_1, B_2, \dots \subset \mathbb{R}$ halmazokra az

$$\{X_1 \in B_1\}, \{X_2 \in B_2\}, \dots$$

események függetlenek.

10. PÉLDA: Legyen H az a háromszög, melynek csúcsai $(0, 0)$; $(3, 0)$; $(0, 3)$. A H határán és belsejében fekvő egész szám koordinátájú pontok 10 elemű

$$\{(i, j) : i + j \leq 3, 0 \leq i, 0 \leq j\}$$

halmazából véletlenszerűen kiválasztunk egyet (minden elemet azonos valószínűséggel) . Legyen X az így kiválasztott pontnak az első és Y ennek a pontnak a második koordinátája. Függetlenek-e az X, Y valószínűségi változók?

Megoldás:

$$P(X=3)=\frac{1}{10}, \quad P(Y=3)=1/10.$$

Viszont

$$P(\{X=3 \text{ és } Y=3\})=0.$$

Tehát az X és az Y nem lehet független mert

$$P(X=3)\cdot P(Y=3)=\frac{1}{100}\neq 0=P(\{X=3, Y=3\})$$

4.4. Várható érték, szórás diszkrét valószínűségi változókra

7. DEFINÍCIÓ: Legyen X egy diszkrét valószínűségi változó, melynek lehetséges értékei

$$x_1, x_2, x_3, \ldots.$$

Ekkor a

$$p(x_i):=P(X=x_i)$$

függvényt az X valószínűségi változó *súlyfüggvényének* hívjuk.

Például a 9. példa 1. részében bevezetett X diszkrét valószínűségi változó esetén a 3. Ábra segítségével látjuk, hogy a valószínűségi változó súlyfüggvénye:

$$p(k)=\begin{cases} \frac{k-1}{36}, & \text{ha } 2\leq k\leq 7; \\ \frac{13-k}{36}, & \text{ha } 8\leq k\leq 12. \end{cases} \tag{6}$$

Az a 9. példa 2. részében bevezetett Y diszkrét valószínűségi változó esetén a valószínűségi súlyfüggvény:

$$p(-2)=\frac{1}{3}, \qquad p(1)=\frac{2}{3}.$$

Most bevezetjük a várható érték és a szórás fogalmát. Durván szólva a várható érték a valószínűségi súlyfüggvény súlyaival képezett súlyozott átlag.

A szórás négyzete pedig a várható értéktől való eltérés *négyzetének* súlyozott átlaga szintén a valószínűségi súlyfüggvény súlyaival képezve. Nagyon sokszor a szórás négyzetet használjuk amit ***varianciának*** mondunk.

8. DEFINÍCIÓ: Adott egy X diszkrét valószínűségi változó, melynek lehetséges értékei $x_1, x_2, \ldots$ és ismerjük ennek $p(x_k)$ valószínűségi súlyfüggvényét. Ekkor az X valószínűségi változó **várható értéke**

$$E[X] := \sum_i x_i \cdot p(x_i)$$

11. PÉLDA: Határozzuk meg a 9. Példa 1. és 2. részében bevezetett X és Y valószínűségi változókra a várható értéket

Megoldás: Várható érték az Y-ra:

$$E[Y] = (-2) \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = 0.$$

Vegyük észre, hogy az Y valószínűségi változó soha nem veszi fel a 0 értéket, mégis a várható értéke egyenlő nullával.

Várható érték X-re

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=2}^{12} k \cdot p(k) \\ &= \sum_{k=2}^{7} k \cdot (k-1)/36 + \sum_{k=8}^{12} k \cdot (13-k)/36 = 7, \end{aligned}$$

amit megkapunk ha a MAPPLE programba beírjuk, hogy

```
sum('k*(k-1)','k'=2..7)/36+sum('k*(13-k)', 'k'=8..12)/36;
```

A várható érték egyik fontos tulajdonsága, hogy:

7. TÉTEL: Legyenek X és Y diszkrét valószínűségi változók. Ekkor

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y]. \tag{7}$$

és minden $c \in \mathbb{R}$ konstansra:

$$E[c \cdot X] = c \cdot E[X] \tag{8}$$

A tétel bizonyítása megtalálható a Vetier jegyzet 157-158. oldalán.

Jegyezzük meg, hogy az $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$ összefüggés minden körülmények között igaz, tehát akkor is ha az X, Y valószínűségi változók nem függetlenek. A következő összefüggés viszont csak a független valószínűségi változókra teljesül:

8. TÉTEL: Legyenek X, Y független valószínűségi változók. Ekkor

$$E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]. \tag{9}$$

9. DEFINÍCIÓ: Az X valószínűségi változó szórásnégyzetét $\mathrm{Var}(X)$-et a következőképpen definiáljuk:

$$\mathrm{Var}(X) := E\left[(X - E[X])^2\right].$$

A szórás négyzet nem negatív gyökét nevezzük az X valószínűségi változó szórásának és $D(X)$-el jelöljük. Megjegyzem, hogy a szórás négyzetet sokan $D^2(X)$-el jelölik.

Ezek kiszámolásához sokat segít a következő észrevétel:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= E\left[(X - E[X])^2\right] = E\left[X^2 - 2E[X] \cdot X + (E[X])^2\right] \\ &= E\left[X^2\right] - 2E[X] \cdot E[X] + (E[X])^2 = E\left[X^2\right] - (E[X])^2 \end{aligned}$$

Vagyis kapjuk a következő nagyon fontos összefüggést

$$\mathrm{Var}(X) = D^2(X) = E\left[X^2\right] - (E[X])^2. \tag{10}$$

12. PÉLDA: Számoljuk ki a 9. Példában definiált X és Y valószínűségi változókra a szórásnégyzetet! Felhasználhatjuk, hogy korábban már megmutattuk, hogy $E[X] = 7$ és $E[Y] = 0$.

Megoldás:

Most kiszámoljuk az Y valószínűségi változó szórás négyzetét $\mathrm{Var}(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2$-t. Mivel $E[Y] = 0$ ezért

$$\mathrm{Var(Y)} = E\left[Y^2\right] = (-2)^2 \cdot \frac{1}{3} + 1^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

Vagyis az Y szórása: $D(Y) = \sqrt{2}$.

Most kiszámoljuk az X valószínűségi változó szórás négyzetét $\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2$-t. Ehhez ki ki kell számolni:

$$\begin{aligned} E\left[X^2\right] &= \sum_{k=2}^{12} k^2 \cdot p(k) \\ &= \sum_{k=2}^{7} k^2 \cdot (k-1)/36 + \sum_{k=8}^{12} k^2 \cdot (13-k)/36 = 54.83333334, \end{aligned}$$

amit meg kapunk a MAPPLE-ből:

```
sum('k^2*(k-1)', 'k'=2..7)/36+sum('k^2*(13-k)', 'k'=8..12)/36;
```

Használva, hogy $E[X] = 7$ kapjuk, hogy:

$$\mathrm{Var}(X) = E\left[X^2\right] - E[X]^2 = 54.83333334 - 7^2 = 5.83333334.$$

Vagyis a szórás

$$D(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{5.83333334} = 2.415229459.$$

5. Nevezetes diszkrét eloszlások.

5.1. Bernoulli és Binomiális eloszlások

Tegyük fel, hogy egy olyan kísérletet hajtunk végre, melynek eredményét jellemezhetjük úgy, mint "siker", vagy "kudarc". Legyen $Y = 1$ amikor az kísérlet eredménye "siker" és $Y = 0$, amikor "kudarc". Ha p a siker valószínűsége, akkor az Y valószínűségi változó valószínűségi súlyfüggvénye:

$$\begin{aligned} p(0) &= P(Y=0) = 1-p \\ p(1) &= P(Y=1) = p. \end{aligned}$$

Ekkor az X valószínűségi változót p paraméterű **Bernoulli valószínűségi változó**nak hívjuk.

Képzeljük most el, hogy n független kísérlet hajtunk végre, melyek mindegyikének kimenetele leírható, mint siker vagy mint kudarc. Tegyük fel, hogy mindegyik esetben a siker valószínűsége p. Legyen X az n kísérlet folyamán elért összes sikerek száma. Ekkor az X valószínűségi változót (n, p) paraméterű **binomiális valószínűségi változó**nak hívjuk. Az (n, p) paraméterű binomiális eloszlások családját $B(n, p)$-vel jelöljük. Vegyük észre, hogy a Bernoulli valószínűségi változó éppen $B(1, p)$-beli. Ha $X \in B(n, p)$ vagyis X egy (n, p) paraméterű binomiális valószínűségi változó, akkor az X valószínűségi sűrűségfüggvénye:

$$p(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Nevezetesen: $p(i)$ annak a valószínűsége, hogy n kísérletből pontosan i következett be. Például, ha $n = 6$ és $i = 2$, akkor azt a 2 helyet, ahol siker következett be $\binom{6}{2}$ féleképpen választhatjuk ki. Az ábra mutat egy ilyen választást. Ennek a bekövetkezésének a valószínűsége $p^2(1-p)^4$.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & * & & & & * \end{array}$$

Egyszerű számolás mutatja, hogy

9. TÉTEL: Ha lerajzoljuk az (n, p) paraméterű binomiális eloszlás valószínűségi sűrűségfüggvényét vagyis az $k \to p(k)$ függvényt, akkor ez először növekszik amíg a maximumát a $k_0 = [(n+1) \cdot p]$-ben eléri azután pedig csökken.

1. LEMMA: Legyen $X \in B(n, p)$. Ekkor X előállítható mint

$$X = Y_1 + \cdots + Y_n,$$

ahol $Y_1, \ldots, Y_n$ független Bernoulli valószínűségi változók.

Bizonyítás. Az X azt adja meg, hogy hány siker lett n kísérlet után. Legyen Y_i az a p paraméterű Bernoulli valószínűségi változó amire

$Y_i = 1$ ha az i-dik kísérlet siker és $Y_i = 0$ ha az i-dik kísérlet kudarc .

Ekkor nyilván

$$X = Y_1 + \cdots + Y_n.$$

$\blacksquare$

13. PÉLDA: (Visszatevéses mintavétel) Egy urnában van N golyó, melyek közül K fehér és $N-K$ fekete. Kihúzunk egy golyót, megjegyezzük a színét majd visszatesszük a golyót. Ezt ismételjük n-szer. Kérdés mi a valószínűsége, hogy i-szer húztunk fehéret ($i \in \{0, 1, \dots, n\}$?)

Megoldás: Legyen X a kihúzott fehér golyók száma és

$$p = \frac{K}{N}.$$

Ekkor $X \in B(n, p)$. Theát a válasz

$$p(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}.$$

14. PÉLDA: Egy vállalkozó csavarokat gyárt és ismert, hogy 100 csavar között átlagosan 1 lesz selejtes. A csavarokat 10 csavart tartalmazó kiszerelésben árusítják és a vásárlónak vissza fizeti a vállalkozó az egész csomag árát, ha a csomag 1-nél több selejtes csavart tartalmaz. A csomagok hány százalékának az árát kell majd a vállalkozónak visszatéríteni?

Megoldás: Legyen X a selejtes csavarok száma egy csomagban. Annak valószínűsége, hogy a csomag árát vissza kell fizetni:

$$\begin{aligned} 1 - P(X=0) - P(X=1) &= 1 - \binom{10}{0}(0.01)^0(0.99)^{10} - \binom{10}{1}(0.01)^1(0.99)^9 \\ &= 0.004 \end{aligned}$$

Tehát az esetek 0.4 százalékában kell a csomag árát visszafizetni.

5.1.1. Bernoulli és Binomiális eloszlás várható értéke és szórása:

Legyen Y egy p paraméterű Bernoulli valószínűségi változó.

$$E[Y] = p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p.$$

Az Y szórásnégyzete:

$$\mathrm{Var}(Y) = E\left[Y^2\right] - (E[Y])^2.$$

Mivel egy Bernoulli valószínűségi változóra $Y^2 = Y$ így $E[Y^2] = E[Y] = p$. Tehát

$$\mathrm{Var}(Y) = p - p^2 = p \cdot (1-p). \tag{11}$$

Most rátérünk a binomiális eloszlásokra. Alkalmazva az 1. Lemmát kapjuk, hogy egy $X \in B(n,p)$ elő áll mint

$$X = Y_1 + \cdots + Y_n, \tag{12}$$

ahol $Y_1, \dots, Y_n$ független p paraméterű Bernoulli valószínűségi változók. Erre az összegre alkalmazva a 7. Tételt kapjuk, hogy az összeg várható értéke egyenlő a várható értékek összegével. Tehát

$$E[X] = E[Y_1] + \cdots + E[Y_n] = \underbrace{p + \cdots + p}_{n} = n \cdot p.$$

A binomiális eloszlás szórásának meghatározásához egyrészt a binomiális eloszlás Bernoulliak összegeként való előállítását használjuk másrészt pedig a következő általános tételt:

10. TÉTEL: Legyen $X = Y_1 + \cdots + Y_n$, ahol $Y_1, \dots, Y_n$ független valószínűségi változók. Ekkor

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y_1) + \cdots + \mathrm{Var}(Y_n). \tag{13}$$

Alkalmazva ezt a Tételt a (12) és (11) formulákat kapjuk, hogy ha $X \in B(n,p)$, $Y_1, \dots, Y_n$ p paraméterű Bernoulli valószínűségi változók, akkor

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y_1) + \cdots + \mathrm{Var}(Y_n) = \underbrace{p(1-p) + \cdots + p(1-p)}_{n} = n \cdot p \cdot (1-p). \tag{14}$$

Tehát ha $X \in B(n,p)$, akkor az X szórása

$$D(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}. \tag{15}$$

5.2. Poisson valószínűségi változó

11. TÉTEL:

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to 0,\ np \to \lambda}} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}.$$

A bizonyítást itt nem részletezzük. Érdeklődő hallgatók megtalálják a Vetier jegyzetben a 71. oldalon. Ez a tétel azt fejezi ki, hogy ha n nagy és p kicsi, akkor egy $X \in B(n,p)$-re és $\lambda = np$-re

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}. \tag{16}$$

10. DEFINÍCIÓ: Azt az X valószínűségi változót, mely értékeit az

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

veszi fel és melynek valószínűségi sűrűség függvénye

$$p(k) = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

λ **paraméterű Poisson eloszlású** valószínűségi változónak hívjuk.

A definíció értelmes mivel minden k-ra $\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} > 0$ és

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} = 1.$$

A Poisson eloszlás tagjait megadó képlet sokkal egyszerűbb mint a binomiális eloszlás tagjait megadó képlet. Ezért a Poisson eloszlást használjuk a binomiális helyett, ha sok, kis valószínűségű, független esemény esetén azt vizsgáljuk, hogy közülük hány következik be.

15. PÉLDA: Poisson eloszlású valószínűségi változók.

1. gépelési hibák száma egy könyvben,
2. egy közösségben azon emberek száma akik megélnek 100 évet,
3. a téves telefon hívások száma egy nap alatt egy bizonyos telefon készüléken,
4. egy posta hivatalba egy nap leforgása alatt belépő ügyfelek száma
5. Magyarországra becsapódó meteorok száma egy év alatt,
6. földrengések száma egy adott hosszúságú idő intervallum alatt,
7. egy évben kitörő háborúk száma,
8. egy adott biztosító társaságnál élet biztosítással rendelkező ügyfelek halálozási száma adott hosszú idő intervallum alatt.

Egyszerű számolás mutatja, hogy

12. TÉTEL: $E[X] = \mathrm{Var}(X) = \lambda$.

16. PÉLDA: Tegyük fel, hogy egy könyvben átlagosan két oldalra jut egy gépelési hiba. Számoljuk ki a valószínűségét annak, hogy mondjuk a 22. oldalon (vagy bármely másik oldalon) van legalább egy hiba.

Megoldás: Legyen X az egy oldalra jutó gépelési hibák száma. Ekkor X egy Poisson eloszlású valószínűségi változó egyenlőre még ismeretlen λ paraméterrel. Először is számoljuk ki λ-át!

$$\lambda = E[X] = \frac{1}{2},$$

hiszen átlagosan két oldalanként van egy hiba vagyis az átlagosan egy oldalra jutó hibák száma (az X várható értéke) egyenlő $\frac{1}{2}$.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \mathrm{e}^{-1/2} \approx 0.393.$$

A 9. Tételhez hasonlóan belátható, hogy

13. TÉTEL: A valószínűségi súlyfüggvény $k \to p(k)$ növekszik $k = [\lambda]$-ig. Maximumát eléri $k = [\lambda]$-ban, majd csökken. Ha λ egy egész szám akkor a valószínűségi súlyfüggvény $k \to p(k)$ a maximumát λ-ban és $\lambda - 1$-ben is felveszi.

(L. Vetier jegyzet 73. oldal.) Ennek alkalmazására egy gyönyörű példa a Vetier jegyzetből:

17. PÉLDA: Tegyük fel, hogy a horgász 100 esetből átlagosan 6-szor nem fog egy halat sem. Hány halat fog a horgász leggyakrabban?

Megoldás: A horgász által fogott halak száma X Poisson eloszlású valószínűségi változó, általunk ebben a pillanatban még nem ismert λ paraméterrel. Az első dolgunk a λ meghatározása. Tudjuk, hogy

$$P(X = 0) = 0.06.$$

Másrészt

$$P(X = 0) = \frac{\lambda^0}{0!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda}.$$

Az utolsó két egyenletből:

$$\lambda = \ln\frac{100}{6} = 2.8.$$

Tehát a horgász leggyakrabban 2 halat fog.

18. PÉLDA: Mi a valószínűsége, annak, hogy az előző feladat horgásza hat halat is fog egy alkalommal?

Megoldás:

$$P(X=6)=\frac{\lambda^6}{6!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\frac{2.8^6}{6!}\underbrace{\frac{6}{100}}_{\mathrm{e}^{-\lambda}}=0.0402.$$

Tehát az esetek hat százalékában semmit sem fogó horgász az esetek négy százalékában hat halat is visz haza.

5.3. Geometriai valószínűségi változó

Tegyük fel, hogy megint csak olyan független kísérleteket hajtunk végre, melyek eredménye leírható mint "siker" (p valószínűséggel) vagy kudarc ($1-p$ valószínűséggel). Legyen most X az a valószínűségi változó, amely megmutatja, hogy hány kísérletet kell végre hajtanunk az első "siker" eléréséig. Tehát $X=4$ azt jelenti, hogy az első három kísérlet eredménye "kudarc" de a negyedik kísérlet "siker"-t hozott. Ekkor az X az értékeit a

$$1,2,3,4,\ldots$$

halmazból veszi fel. Továbbá

$$P(X=n)=(1-p)^{n-1}\cdot p.$$

Ugyanis annak valószínűsége hogy az első $n-1$ kísérlet mindegyike "kudarc" $(1-p)^{n-1}$. Ezt meg kell szorozni annak valószínűségével, hogy az n-edik kísérlet eredménye "siker" amely valószínűség egyenlő p-vel. Ekkor X-et p **paraméterű geometriai valószínűségi változó**nak hívjuk.

14. TÉTEL: Egyszerű számolás mutatja, hogy

$$E\left[X\right]=\frac{1}{p} \text{ és } \operatorname{Var}(X)=\frac{1-p}{p^2}.$$

19. PÉLDA: Tegyük fel, hogy egy urnában van N fehér és M fekete golyó. Kihúzunk egy golyót. Ha fekete megállunk, ha fehér vissza tesszük. Ezt folytatjuk amíg az első feketét nem húzzuk. Kérdés mi a valószínűsége, hogy pontosan n húzásra volt szükség amíg az első fekete golyót kihúztuk?

Megoldás: Legyen X a húzások száma amíg az első fekete golyót megkaptuk. Ekkor X egy $p = M/(M+N)$ paraméterű geometriai valószínűségi változó. Ezért

$$P(X=n) = \left(\frac{N}{N+M}\right)^{n-1} \cdot \frac{M}{M+N} = \frac{MN^{n-1}}{(M+N)^n}.$$

6. Nevezetes folytonos valószínűségi változók

Ebben a fejezetben olyan valószínűségi változókat tekintünk, melyek értékeiket az $\mathbb{R}$) egy nem megszámlálhatóan végtelen részhalmazából veszik (mint például egy intervallum vagy egy félegyenes vagy maga az $\mathbb{R}$).

20. PÉLDA: 1. Annak pontos időpontja, hogy egy adott vonat mikor érkezik egy adott állomásra.

2. Egy tranzisztor élettartama.

11. DEFINÍCIÓ: Azt mondjuk, hogy az X valószínűségi változó folytonos, ha létezik olyan $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ nem negatív függvény, melyre

$$P(X \in B) = \int_B f(x)dx \tag{17}$$

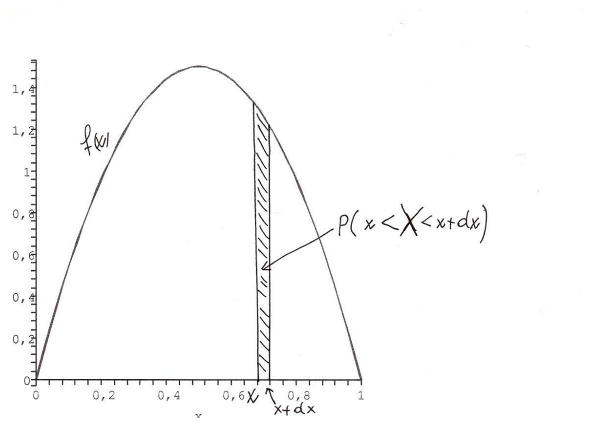
teljesül minden $B \subset \mathbb{R}$-re. Ekkor az f függvény az X sűrűségfüggvénye.

Vegyük észre, hogy

$$1 = P(X \in \mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

Tehát a sűrűségfüggvény mindig

- Az $\mathbb{R}$-en (számegyenes) értelmezett,
- nem negatív,
- az $\mathbb{R}$-en vett integrálja egyenlő 1-el.



4. ábra. Az X sűrűségfüggvénye

Vegyük észre, hogy egy folytonos X valószínűségi változóra mindig teljesül, hogy tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ pontot nulla valószínűséggel vesz fel. Ugyanis ha $a \in \mathbb{R}$:

$$P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0,$$

ahol $f(x)$ az X sűrűségfüggvénye. A folytonos eloszlásokkal kapcsolatban úgyszintén nagyon fontos az úgynevezett eloszlás függvény:

12. DEFINÍCIÓ: Az X valószínűségi változó eloszlás függvénye:

$$F(a) = P(X < a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx. \tag{18}$$

Így tehát egy folytonos X valószínűségi változóra, melynek sűrűségfüggvénye $f(x)$:

$$P(X \geq a) = P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a). \tag{19}$$

21. PÉLDA: Hogyan kell választanunk a c értékét ahhoz, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} cx(1-x), & \text{ha } 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{20}$$

Megoldás: Azt kell biztosítanunk, hogy $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{0}^{1} f(x)dx = 1$ teljesüljön. Mivel $\int\limits_{0}^{1} x(1-x)dx = 1/6$ ezért $c = 6$.

6.1. Várható érték, szórás folytonos eloszlásokra

Az $f(x)$ sűrűségfüggvény definíciójából adódóan

$$P(x < X < x + dx) \approx f(x)dx. \tag{21}$$

A diszkrét valószínűségi változók esetében a várható értéket úgy kapjuk, ha összegezzük az összes lehetséges érték szorozva az érték valószínűségével szorzatokat. Ennek tehát a folytonos esetben az felel meg, hogy

13. DEFINÍCIÓ: Az X várható értéke:

$$E[X] := \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

és szórás négyzete:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) = D^2(X) &= E\left[(X - E[X])^2\right] = E\left[X^2\right] - (E\left[X\right])^2 \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx - \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx\right)^2. \end{aligned}$$

6.2. Egyenletes eloszlás.

14. DEFINÍCIÓ: Az X folytonos valószínűségi változó az (a, b) intervallumon egyenletes eloszlású, ha sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } x \in (a, b); \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor intergarálással azonnal adódik, hogy az X eloszlás függvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le a; \\ \frac{x-a}{a-b}, & \text{ha } a < x < b; \\ 1, & \text{ha } b \le x. \end{cases}$$

A várható érték:

$$\int\limits_a^b x \cdot f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \frac{1}{2}(b^2 - a^2) = \frac{a+b}{2}.$$

Hasonlóan triviális számolással kapjuk, hogy

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

6.3. Normális valószínűségi változó

15. DEFINÍCIÓ: Azt mondjuk, hogy az X valószínűségi változó normális eloszlású (μ, σ^2) paraméterekkel (jelben $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$), ha sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot (x-\mu)^2}.$$

Standard normális eloszlásról beszélünk, amikor $\mu = 0$ és $\sigma = 1$. A standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye tehát:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

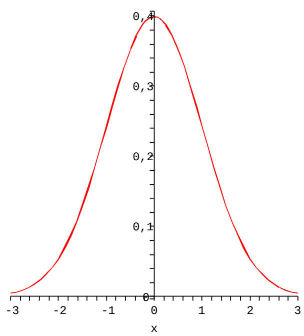
A standard normális eloszlás eloszlás függvénye

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

nem fejezhető ki elemi képlettel, értékeit táblázatból vesszük. Szimmetriai megfontolásból:

$$\Phi(-a) = 1 - \Phi(a) \tag{22}$$

teljesül minden a-ra. Ez azért fontos, mert a táblázatban a Φ értékei csak pozitív számokra adott.



5. ábra. A standard normális eloszlás $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ sűrűségfüggvényének a $[-3,3]$-ba eső darabja. Az x és az y tengelyeken különböző egységeket használva.

22. PÉLDA: Legyen $X \in \mathcal{N}(3,9)$, vagyis az X egy $(3,9)$ paraméterű normális eloszlás. Határozzuk meg $P(2 < X < 5) =?$

Megoldás: Legyen Z egy standard normális eloszlású valószínűségi változó. ekkor

$$\begin{aligned} P(2 < X < 5) &= P(\frac{2-3}{3} < \frac{X-3}{3} < \frac{5-3}{3}) \\ &= P(-\frac{1}{3} < Z < \frac{2}{3}) \\ &= \Phi(\frac{2}{3}) - \Phi(-\frac{1}{3}) = \Phi(\frac{2}{3}) - (1 - \Phi(\frac{1}{3})) = 0.3779. \end{aligned}$$

Egyszerű integrálással adódik, hogy ha $X \in \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, akkor

$$E[X] = \mu \text{ és } \mathrm{Var}(X) = \sigma^2. \tag{23}$$

6.4. Exponenciális eloszlás

16. DEFINÍCIÓ: Azt a folytonos eloszlást, melynek sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geq 0; \\ 0, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

λ-paraméterű exponenciális eloszlás.

Integrálással kapjuk, hogy az eloszlás függvény:

$$F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

Továbbá

$$E[X] = \int_0^\infty x \cdot \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \text{ és } \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{24}$$

23. PÉLDA: A nyilvános telefonról leadott hívások hossza exponenciális eloszlású, és mondjuk, átlagosan 10 percesek. Tegyük fel hogy valaki pont előttünk ér a készülékhez. Határozzuk meg, hogy mekkora annak a valószínűsége, hogy

(a) 10 percet kell várnunk,

(b) 10 és 20 perc közötti ideig kell várakoznunk?

Megoldás: Mivel $E[X] = \frac{1}{\lambda}$ ezért $\lambda = \frac{1}{10}$ (hiszen az átlagos hívás hossza egyenlő $10 = E[X] = \frac{1}{\lambda}$ perc). Ezért
(a)

$$P(X > 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{10} \cdot 10}) = \mathrm{e}^{-1} = 0.368.$$

(b)

$$P(10 < X < 20) = F(20) - F(10) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{10} \cdot 20} - (1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{10} \cdot 10}) = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-2} = 0.233.$$

6.4.1. Exponenciális eloszlás örök ifjú tulajdonsága

Legyen X egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor minden $s, t > 0$ számra:

$$P(X > s + t | X > s) = P(X > t). \tag{25}$$

Vagyis ha tudjuk, hogy X nagyobb mint s, akkor annak a valószínűsége, hogy X még az $s + t$-nél is nagyobb egyenlő annak a valószínűségével, hogy X nagyobb mint t (minden feltétel nélkül). A (25) formula egyszerű számolással igazolható. Másrészt szintén egyszerűen igazolható, hogy ha X egy olyan folytonos eloszlás, amely teljesíti a (25) formulában megfogalmazott örök ifjú tulajdonságot, akkor az X egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Az exponenciális eloszlású változó a gyakorlatban legtöbbször úgy fordul elő, mint az az idő, amíg egy bizonyos esemény bekövetkezik. Például amíg várni kell az első földrengésre, az első háborúra vagy amíg várni kell, hogy először téves hívást kapjunk a telefonunkra.

6.4.2. Poisson és exponenciális eloszlások kapcsolata

Az előbbi három példa esetén olyan események történnek bizonyos idő intervallumban, melyekről a következőket tehetjük fel:

1. Annak valószínűsége, hogy pontosan egy esemény következik be egy nagyon kicsi h hosszú idő intervallumban egyenlő egy bizonyos λ szám szorozva h-val plusz egy h-hoz képest nagyságrenddel kisebb mennyiség.

2. Annak valószínűsége, hogy egynél több esemény következik be egy nagyon kicsi h hosszú idő intervallumban a h-nál nagyságrenddel kisebb.

3. Bármi történik egy adott időintervallumban annak semmi hatása arra, hogy egy másik időintervallumban mi történik.

15. TÉTEL: Amikor a fenti három feltétel teljesül, akkor a $[0, t]$ idő intervallumban bekövetkező $N(t)$ **események számát** leíró valószínűségi változó egy $\lambda \cdot t$**-paraméterű Poisson valószínűségi változó**. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az események egy λ-paraméterű Poisson folyamat szerint történnek.

Ebben az esetben legyen X az a valószínűségi változó, amely megadja, hogy az esemény mikor következik be először. Ekkor X egy λ-paraméterű exponenciális eloszlás. Nevezetesen:

$$P(X > t) = P(N(t) = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^0}{0!} = \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

Tehát az X eloszlás függvénye

$$F(t) = P(X < t) = 1 - P(X > t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

24. PÉLDA: Vetier Tanár Úrék családjában megfigyelték, hogy havonta átlagosan 2.5 pohár törik el. Kérdés: mi annak a valószínűsége, hogy a következő 10 napban nem törik egyetlen pohár sem?

Megoldás: Legyen Y a törő poharak száma havonta. Ez a feltétel szerint Poisson eloszlású $\lambda = 2.5$-paraméterrel. Legyen X az első pohár törésének időpontja. Ez a fentiek értelmében egy $\lambda = 2.5$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Az az esemény, hogy a következő 10 napban (ami egy hónap harmada) nem törik pohár $(X > \frac{1}{3})$. Tehát a keresett valószínűség:

$$P\left(X > \frac{1}{3}\right) = 1 - P\left(X < \frac{1}{3}\right) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-2.5\cdot\frac{1}{3}}) = \mathrm{e}^{-2.5/3} = .4345982085.$$

7. Binomiális eloszlás közelítése normális eloszlással

16. TÉTEL: (DeMoivre-Laplace tétel) Olyan független kísérleteket hajtunk végre, melyek eredményei mint, "siker" vagy mint "kudarc" írhatóak le, és a siker valószínűsége egyenlő p-vel. Jelölje S_n a sikerek számát n kísérlet után. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{a \le \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le b\right\} = \Phi(b) - \Phi(a),$$

ahol Φ a standard normális eloszlás eloszlás függvénye, vagyis

$$\Phi(a) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

A tételben szereplő S_n persze (n, p) paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó. Ez tehát a binomiális eloszlás approximációja normális eloszlással. Ilyen esetben mindig az ún. folytonossági korrekciót használjuk, vagyis

$$P(X = i) \text{ helyett a } P\left(i - \frac{1}{2} < X < i + \frac{1}{2}\right)\text{-et} \tag{26}$$

számoljuk ki.

Már tárgyaltunk hasonló dolgokat a Poisson eloszlásnál. Ott azt tanultuk, hogy a Poisson eloszlás jól approximálja a binomiális eloszlást ha n nagy és p kicsi. A normális eloszlás jó közelítését adja a binomiálisnak, ha $np(1-p)$ nagy. Valójában egészen jó közelítést kapunk, ha $np(1-p) > 10$.

25. PÉLDA: Legyen X a fejek száma, ha 40-szer feldobunk egy szabályos érmét. Ekkor X binomiális eloszlású valószínűségi változó $(40, 1/2)$ paraméterrel. Vagyis

$$P(X = 20) = \binom{40}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{40} \approx 0.1254.$$

Határozzuk meg a $P(X = 20)$ valószínűség approximációját normális eloszlással.

Megoldás: Ekkor a DeMoivre-Laplace tétel tételben szereplő

$$np = 40 \cdot 0.5 = 20 \text{ és} \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{40 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{10}.$$

Ezért a folytonossági korrekciót és a DeMoivre-Laplace tételt alkalmazva:

$$\begin{aligned} P(X = 20) &= P(19.5 < X < 20.5) \\ &= P\left(\frac{19.5 - 20}{\sqrt{10}} < \frac{X - 20}{\sqrt{10}} < \frac{20.5 - 20}{\sqrt{10}}\right) \\ &= P\left(-0.16 < \frac{X - 20}{\sqrt{10}} < 0.16\right) \\ &= \Phi(0.16) - \Phi(-0.16) = \Phi(0.16) - (1 - \Phi(0.16)) \approx 0.1272. \end{aligned}$$

26. PÉLDA: Valaki ideálisan 150 vendéget szeretne. Tudja, hogy akiket meghív $p = 0.3$ valószínűséggel jönnek el. Tegyük fel, hogy 450 embert hív meg. Mi a valószínűsége, hogy 150-nél több vendége lesz?

Megoldás: Ha X a meghívást elfogadók száma, akkor X egy binomiális eloszlású valószínűségi változó $(450, 0.3)$ paraméterekkel. A folytonossági korrekciót és a DeMoivre-Laplace tételt alkalmazva:

$$\begin{aligned}
P(X \geq 150.5) &= P\left(\frac{X - 450 \cdot 0.3}{\sqrt{450 \cdot 0.3 \cdot 0.7}} \geq \underbrace{\frac{150.5 - 450 \cdot 0.3}{\sqrt{450 \cdot 0.3 \cdot 0.7}}}_{1.59}\right) \\
&= 1 - \Phi(1.59) \\
&= 0.0559
\end{aligned}$$

Vagyis ha a házigazda 450 vendéget hív, akkor annak az esélye, hogy 150-nél több jön el kevesebb mint 6%.

8. Határeloszlás tételek

8.1. Markov és Csebisev egyenlőtlenségek

17. TÉTEL: (Markov egyenlőtlenség) Legyen X egy valószínűségi változó, mely csak nem negatív értékeket vesz fel. Ekkor minden $a > 0$-ra

$$P(X > a) \leq \frac{E[X]}{a}.$$

27. PÉLDA: Tegyük fel, hogy ez üzemben átlagosan hetente 50 terméket gyártanak. Mi annak a valószínűsége, hogy ezen a héten több mint 75 terméket fognak gyártani?

Megoldás: Legyen X az ezen a héten gyártott termékek száma. Ekkor tudjuk, hogy $E[X] = 50$. A fenti tételt alkalmazva:

$$P(X > 75) < \frac{50}{75} = \frac{2}{3}.$$

18. TÉTEL: (Csebisev egyenlőtlenség) Legyen X egy valószínűségi változó, melynek várható értéke μ és varianciája σ^2. Ekkor minden $k > 0$-ra:

$$P(|X - \mu| \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}.$$

28. PÉLDA: Tegyük fel, hogy egy üzemben átlagosan hetente 50 terméket gyártanak, mint az előző feladatban, de most azt is tudjuk, hogy a gyártott termékek számának varienciája egyenlő 25-el. Legalább mekkora annak a valószínűsége, hogy ezen a héten gyártott termékek száma az átlagostól nem tér el 10-nél többel, vagyis, hogy ezen a héten 40 és 60 közötti terméket gyártanak?

Megoldás: A Chebyshev egyenlőtlenséget alkalmazva $\mu = 50$ és $\sigma^2 = 10^2$-re:

$$P(|X - 50| \geq 10) \leq \frac{\sigma^2}{10^2} = \frac{1}{4}$$

Tehát

$$P(|X - 50| < 10) \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Tehát annak valószínűsége, hogy ezen a héten 40 és 60 közötti terméket gyártanak legalább 0.75.

Mivel a Chebyshev egyenlőtlenség minden X-re igaz ezért durva becslést becslést ad.

19. TÉTEL: (Nagy számok erős törvénye) Legyen $X_1, X_2, X_3, \ldots$ azonos eloszlású független valószínűségi változók sorozata, melyekre minden i-re:

$$E\left[X_i\right] = \mu.$$

Ekkor annak valószínűsége, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \mu$$

egyenlő 1-el.

A Centrális Határeloszlás tétel azt mondja, ki, hogy sok független valószínűségi változónak az összege közelítőleg normális eloszlású.

20. TÉTEL: (Centrális Határeloszlás Tétel (CHT)) Legyen $X_1, X_2, X_3, \ldots$ azonos eloszlású független valószínűségi változók sorozata, melyekre, minden i-re:

$$E\left[X_i\right] = \mu \text{ és } Var(X_i) = \sigma^2.$$

Ekkor minden a-ra:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-n\mu}{\sigma\cdot\sqrt{n}}\leq a\right)\to\Phi(a)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{a}\mathrm{e}^{-x^2/2}dx.$$

29. PÉLDA: Távoli csillag távolságának fényévekben való mérésekor minden mérésnél az atmoszféra változó állapota miatt hibát vétünk. Ezért több mérést hajtunk végre, és ezek eredményét átlagoljuk. A mérési eredményeket független azonos eloszlású változóknak tekintjük, melyek várható értéke a csillag (a megbecsülni kívánt) távolsága és szórása 4 fényév. Hány mérést kell végeznünk, hogy 0.95 valószínűséggel a méréseink eredményeinek átlaga a valódi távolságtól nem több mint 1/2 fényévvel térjen el?

Megoldás: Jelöljük a szükséges mérések számát n-el és $X_1, X_2, \ldots, X_n$ valószínűségi változók értékei az $1, 2, \ldots, n$-ik mérések eredményei. Ekkor a

$$Z_n=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-nd}{2\cdot\sqrt{n}}$$

megközelítőleg normális eloszlású valószínűségi változó. Felhasználva, hogy

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}{n}-d=\frac{2}{\sqrt{n}}Z_n$$

kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
P\left(-0.5\leq\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}{n}-d\leq 0.5\right) &= P\left(-0.5\leq\frac{2}{\sqrt{n}}Z_n\leq 0.5\right)\\
&= P\left(-0.5\frac{\sqrt{n}}{2}\leq Z_n\leq 0.5\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\\
&\approx \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right)-\underbrace{\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{4}\right)}_{1-\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right)}=2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right)-1
\end{aligned}$$

Ha $2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right)-1=0.95$, akkor $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right)=0.975$. Táblázatból vissza keresve: $\frac{\sqrt{n}}{4}=1.96$. Vagyis $n\approx 61.47$. Tehát 62 mérés kell.

30. PÉLDA: A rullette-ben van 18 fekete, 18 fehér és két zöld pozíció (melyeket 0-val és 00-val jelölnek). Ha valaki a fehérre tesz 1 \$-t, akkor 18/38-ad valószínűséggel nyer 1\$-t, 20/38 valószínűséggel veszít 1\$-t. Legyen

$$X_1, X_2, X_3, \ldots$$

a nyereménye az első, második,... játék után. Ekkor $X_1, X_2, X_3, \ldots$ független valószínűségi változók, melyek súlyfüggvénye:

$$P(X_i = 1) = 9/19 \text{ és } P(X = -1) = 10/19.$$

Tehát

$$E[X] = 9/19 \cdot 1 + 10/19 \cdot (-1) = -0.05263$$

dollár. A variencia:

$$\sigma^2 = 0.9972 \approx 1.$$

Ha $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, akkor a CHT szerint:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma \cdot \sqrt{n}} \leq y\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n \cdot (-0.05263)}{1 \cdot \sqrt{n}} \leq y\right) = \Phi(y).$$

Keressük mondjuk annak a valószínűségét, hogy 100 játék után pozitív a mérlegünk vagyis

$$P(S_{100} > 0) =?$$

$$\begin{aligned} P(S_{100} > 0) &= 1 - P(S_{100} \leq 0) \\ &= 1 - \underbrace{P\left(\underbrace{\frac{S_{100} - 100\mu}{10}}_{\approx \text{standard normális}} \leq \underbrace{\frac{0 - 100\mu}{10}}_{0.526}\right)}_{\approx \Phi(0.526)} \\ &\approx 1 - \Phi(0.526) = 0.3 \end{aligned}$$

Tehát annak valószínűsége, hogy 100 játék után nyereményünk van 30%. Most tegyük fel, hogy van 100 játékos mind 100-szor játszik. Ez olyan mintha egy játékos 10000-szer játszana. Számoljuk ki, hogy

$$P(S_{10000} \leq -296) =?$$

Ez tehát annak a valószínűsége, hogy összesen 10000 játék után a CASINO **legalább** 296$-t könyvel el.

$$\begin{aligned}
P(S_{10000} < -296) &= P\left(\underbrace{\frac{S_{10000} - 10000 \cdot \underbrace{(-0.05263)}_{\mu}}{\underbrace{1}_{\sigma} \cdot \underbrace{\sqrt{10000}}_{\sqrt{n}}}}_{\approx \text{standard normális}} \leq \underbrace{\frac{-296 - 10000 \cdot \underbrace{(-0.05263)}_{\mu}}{\underbrace{1}_{\sigma} \cdot \underbrace{\sqrt{10000}}_{\sqrt{n}}}}_{2.3}\right) \\
&= \Phi(2.3) \approx 0.99.
\end{aligned}$$

Tehát 99% annak a valószínűsége, hogy 10000 játék után a Casino nyer összesen **legalább** 296$-t.

Közönséges differenciálegyenletek

9. Bevezetés, definíciók

A differenciálegyenletek olyan egyenletek, melyekben az ismeretlen egy függvény és az egyenletben az ismeretlen függvény deriváltja is előfordul. Például ha $y = y(x)$ az ismeretlen függvény, akkor

$$y' = y \tag{27}$$

$$y'' = -y \tag{28}$$

$$y'' = y \tag{29}$$

$$y = \frac{y}{x} + x \tag{30}$$

függvényegyenletek közül az első három differenciálegyenlet, de a negyedik már nem, mert ott az ismeretlen $y = y(x)$ függvény semelyik deriváltja nem szerepel. A differenciálegyenletek tanulmányozása azért fontos, mert amint Newton mondta: "a természet törvényeit differenciálegyenletek írják le". Az $y' = y$ differenciálegyenletet megoldani annyit jelent, mint megtalálni az összes olyan függvényt, amely egyenlő az ő derivált függvényével. Könnyű látni, hogy minden $c \in \mathbf{R}$-re az $y = ce^x$ alakú függvényekre igaz, hogy az ő deriváltjaik saját magukkal megegyeznek, tehát az összes $y = ce^x$ alakú függvény a (27) differenciálegyenlet megoldása. (Azt, hogy ennek az egyenletnek minden megoldása $y = ce^x$ alakú, majd később látjuk be.)

A (28) egyenletet illetően, középiskolás tanulmányainkra visszagondolva láthatjuk, hogy mind a $y(x) = \cos(x)$, mind pedig az $y(x) = \sin(x)$ függvényekre igaz, hogy az ő második deriváltjuk saját maguk negatívjával egyezik meg, vagyis, hogy a $\cos(x)$ és $\sin(x)$ függvények a (28) egyenlet megoldását képezik. Azt nagyon könnyű látni, hogy ezek tetszőleges lineáris kombinációja szintén megoldást ad. Tehát tetszőlegesen választott $a, b \in \mathbf{R}$ számokra: az $y(x) = a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)$ a (28) diff.egyenlet megoldását adja. Szintén később fogjuk belátni, hogy a (28) egyenlet minden megoldása ilyen alakú. Hasonlóan kapjuk, hogy a (29) egyenlet minden megoldása $y = a \cdot ch(x) + b \cdot sh(x)$. Az nyilvánvaló, hogy a fenti három differenciálegyenlet a legegyszerűbb alakú nem-triviális differenciálegyenlet. Később látni fogjuk, hogy ezek mindegyike rendkívül fontos is, mert a legfontosabb fizikai alkalmazásokban ezek fordulnak elő.

Az első féléves analízis tanulmányok után már nyilvánvaló, hogy nem lehet remélni sem azt, hogy minden differenciálegyenlet megoldását valamilyen képlettel leírható függvények segítségével megadhatjuk. Ugyanis, az $f(x) = \frac{e^x}{x}$ függvénynek nincs képlettel megadható primitív függvénye. Ez éppen azt jelenti, hogy az $y' = \frac{e^x}{x}$ differenciálegyenletnek nincs képlettel megadható megoldása.

10. Elsőrendű diff.egyenletek

Ebben a fejezetben az

$$y'(t) = F(t, y(t)) \tag{31}$$

alakú differenciálegyenletekkel foglakozunk. Először a szétválasztható változójú azután pedig az első rendű lineáris differenciálegyenleteket tekintjük. Ezeket meg tudjuk oldani elég egyszerűen. Azután azt vizsgáljuk általános elsőrendű differenciálegyenletekre, hogy a kezdeti érték problémának létezik-e megoldása (egzisztencia) és ha igen akkor egyértelmű-e (unicitás). Ezután **autonóm egyenleteket** tekintünk. Ezek a olyan speciális (31) alakú elsőrendű egyenletek, amelyekre a (31) egyenlet jobb oldala nem függ a t független változótól közvetlenül. (Például $y'(t) = y(t) \cdot (1 - y(t))$ autonóm egyenlet, de $y'(t) = y(t) \cdot (1 - y(t)) + t$ már nem autonóm egyenlet.) A fejezetet az autonóm egyenletek stabilitási vizsgálatával zárjuk.

10.1. Szétválasztható diff.egyenletek

Legyen $f(x)$ egy folytonos függvény valamely I_1 és $g(y)$ egy folytonos függvény valamely I_2 intervallumon, továbbá $g(y) \neq 0$ ha $y \in I_2$. Ekkor az

$$y' = f(x)\, g(y) \tag{32}$$

alakú elsőrendű közönséges differenciálegyenleteket *szétválasztható változójú* differenciálegyenleteknek hívjuk. Legyen $h(y) = \frac{1}{g(y)}$. Tehát (32) szerint: $h(y)\, y' = f(x)$. Ekkor a helyettesítéses integrálás szabálya szerint és $\frac{dy}{dx} = y'$ alapján:

$$\underbrace{\int h(y)\, dy}_{\substack{\text{Ez csak} \\ y\text{-tól függ}}} = \underbrace{\int f(x)\, dx}_{\substack{\text{Ez csak} \\ x\text{-től függ}}} + C.$$

A szétválasztható változójú diff.egyenletek megoldását a következő példán mutatjuk be:

31. PÉLDA: 1. *A normális növekedés egyenlete:* legyen $k \in \mathbf{R} \setminus \{\emptyset\}$ és $a \in \mathbf{R}$

$$y' = ky \text{ és } y(0) = a. \tag{33}$$

ez nagyon fontos egyenlet, mert sokszor előfordul a gyakorlatban ezért a megoldását fejből kell tudni. Nyilvánvalóan szétválasztható változójú diff.egyenlet. $y' = \frac{dy}{dx}$-et írva: $\frac{dy}{dx} = ky$. Az y-os és x-es tagokat külön oldalra rendezve: $\frac{1}{k}\frac{dy}{y} = dx$. Mindkét oldalt integrálva: $\ln|y| = kx + C$, amiből az $y' = ky$ általános megoldása $y = e^c e^{kx}$. Használva , hogy $a = y(0) = Ce^0$, ebből a (33) Cauchy feladat megoldása:

$$y = ae^{kx}.$$

Ezt kérem jegyezzék meg!

2. $y'y^2 = 1$. Ez a diff.egyenlet szétválasztható változójú, mivel a fenti $f(x) = 1$ és $g(y) = \frac{1}{y^2}$ választással $y' = f(x)g(y)$. Az $y' = \frac{dy}{dx}$-et írva és a dx-el formálisan átszorozva kapjuk, hogy:

$$y^2 dy = dx.$$

Mindkét oldalt integrálva: $\int y^2 dy = \int dx$. Amiből $\frac{y^3}{3} = x + C$ adódik. Innen $y = \sqrt[3]{3x + C}$ (mivel C tetszőleges konstans, nem kell 3-al megszorozni, mert $3C$ ugyanúgy mindentől független konstans, mint C).

3. $y' = \frac{2xy \ln y}{x^2 - 1}$. ez a diff.egyenlet is szétválasztható változójú, ugyanis ha $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$-et és $g(y) = y \ln y$-t írunk akkor a diff.egyenlet $y' = f(x)g(y)$ alakú lesz. A diff.egyenlet megoldása most is úgy történik, hogy $y' = \frac{dy}{dx}$-et írva:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy \ln y}{x^2 - 1}.$$

Most az y-os és x-es tagokat más-más oldalra rendezve:

$$\frac{dy}{y \ln y} = \frac{2x}{x^2 - 1} dx.$$

(Ha $y \ln y \neq 0$.) Mindkét oldalon integrálva:

$$\int \frac{\frac{1}{y} dy}{\ln y} = \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx$$

-ből adódik, hogy $\ln |\ln y| = \ln |x^2 - 1| + \ln C$. (Itt a konstanst eleve $\ln C$ alakba írtuk, amit megtehetünk, mert az $\ln x$ függvény értékkészlete az $\mathbf{R}$.) Ahonnan: $y = e^{C(x^2-1)}$. Az $\ln y = 0$-nak az $y \equiv 1$ felel meg.

10.2. Elsőrendű lineáris diff.egyenletek megoldása

Az

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{34}$$

alakú diff.egyenleteket *elsőrendű lineáris diff.egyenleteknek hívjuk.* It feltételezzük, hogy a $p(x)$ a $q(x)$ függvények folytonosak. (Vagyis a megoldásokat olyan intervallumon keressük ahol a $p(x)$ a $q(x)$ függvények folytonosak.)

Az (34) alakú egyenletek megoldását a következő példán szemléltetjük:

$$xy' + 3y = x^2,\ x > 0 \tag{35}$$

Ahhoz, hogy az egyenletet (34) alakúra hozzuk el kell osztanunk x-el mind a két oldalon. Ezért, a megoldásokat olyan intervallumokon kereshetjük amelyek a 0-át nem tartalmazzák. Tegyük fel tehát, hogy mostantól $x > 0$ és osszunk el x-el. Kapjuk, hogy

$$y' + \frac{3}{x}y = x. \tag{36}$$

Ekkor az (34) egyenlet jelöléseivel: $p(x) = \frac{3}{x}$; $q(x) = x$. A megoldás két lépésből áll. Először megoldjuk az

$$Y' + \frac{3Y}{x} = 0 \tag{37}$$

homogén diff.egyenletet. Majd ennek az általános megoldásában előforduló C konstans helyére egy olyan $C(x)$ függvényt írunk, hogy ezzel a (35) megoldását kapjuk. Ily módon a (35) egy partikuláris megoldásához jutunk. A (35) általános megoldását úgy kapjuk, hogy

$$y_{i,ált} = Y_{h,ált} + y_{i,p} \tag{38}$$

vagyis a (35) inhomogén egyenlet általános megoldása $y_{i,ált}$ egyenlő az (37) általános megoldása $Y_{h,ált}$ plusz a (35) inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása $y_{i,p}$.

1. lépés: A homogén rész az $Y' + \frac{3Y}{x} = 0$ diff.egyenlet, amely szétválasztható változójú és megoldása: $Y_{h,ált} = C/x^3$.

2.lépés: Most keressük az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását, $y_{i,p}$-t. Ehhez szeretnénk határozni **egy** olyan $C(x)$ függvényt, amelyre

$$y = C(x)/x^3$$

megoldása a (35) egyenletnek. Mivel $y' = -3Cx^{-4} + C'x^{-3}$, ezt behelyettesítve a (36) egyenletbe kapjuk, hogy

$$C'x^{-3} - 3Cx^{-4} + 3x^{-1}Cx^{-3} = x.$$

Innen: $C(x) = x^5/5$ (itt nem kell feltüntetni az integrálból adódó konstanst, mert csak **egy** partikuláris megoldást keresünk). Tehát $y_{i,p} = C(x) \cdot x^{-3} = x^5/5 \cdot x^{-3} = \frac{x^2}{5}$. Így a (36) egyenlet általános megoldása:

$$y_{i,ált} = Y_{h,ált} + y_{i,p} = \underbrace{c \cdot x^{-3}}_{Y_{h,ált}} + \underbrace{\frac{x^2}{5}}_{y_{i,p}}.$$

A megoldásnak ezt a módszerét **konstans variációs módszernek** nevezzük, mert az $y_{i,p}$-t úgy határoztuk meg, hogy az (37) homogén egyenlet általános megoldásában előforduló C konstanst helyettesítettük egy $C(x)$ függvénnyel.

10.3. Egzisztencia, unicitás, stabilitás

Ha egy elsőrendű egyenletet nem is tudunk megoldani, akkor is lehet esélyünk annak a nagyon fontos kérdésnek az eldöntésére, hogy létezik-e és ha igen akkor egyértelmű-e a megoldás. Ha az előbbire a válasz igen, akkor van egzisztencia, ha a ezen felül a második kérdésre is pozitív a válasz, akkor teljesül az unicitás. A következő tételek nem a lehető legerősebb eredményeket adják, de a legkönnyebben érthetőek.

Először vizsgáljuk az egzisztencia és unicitás kérdést az elsőrendű lineáris egyenletekre:

21. TÉTEL: (Egzisztencia és unicitás Tétel (első rendű lineáris egyenletre)) Ha a $p(t)$ és $q(t)$ függvények folytonosak az $I = (\alpha, \beta)$ nyílt intervallumon és $t_0 \in I$ akkor a

$$y' + p(t)y = q(t), \qquad y(t_0) = y_0$$

kezdeti érték probléma megoldása létezik és egyértelmű az I intervallumon. Azaz létezik EGYETLEN olyan $y(t)$ függvény, amely a kezdeti érték problémának megoldása és amely minden $t \in I$-re értelmezett.

A következő tétel az általános esetre vonatkozik:

22. TÉTEL: (Egzisztencia és unicitás Tétel (általános eset)) Tegyük fel, hogy mind az F mind a $\partial F/\partial y$ folytonos függvények egy olyan $\alpha < t < \beta, \gamma < y < \delta$ téglalapon, amely tartalmazza a (t_0, y_0) pontot. Akkor van olyan $(t_0 - h, t_0 + h) \subset (\alpha, \beta)$ intervallum, amelyben a következő kezdeti érték probléma megoldása létezik és egyértelmű:

$$y' = F(t, y), \qquad y(t_0) = y_0. \tag{39}$$

3. MEGJEGYZÉS: Ha csak annyit tudunk, hogy az $F(x,y)$ függvény folytonos akkor ez már elég ahhoz, hogy a megoldás létezzen, de lehetséges, hogy nem egyértelmű.

32. PÉLDA: A fenti tételek valamelyikét használva találjunk olyan intervallumot, amelyen

$$ty' + 2y = 4t^2 \qquad y(1) = 2$$

kezdeti érték probléma megoldása létezik és egyértelmű.

Megoldás: Mindkét oldalt t-vel leosztva kapjuk a

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t$$

egyenletet. Tehát $p(t) = \frac{2}{t}$ és $q(t) = 4t$. Vagyis $q(t)$ értelmezett és folytonos minden $t \in \mathbb{R}$-re de $p(t)$ a $t = 0$-ban nincs értelmezve. Tehát vagy azt kell feltennünk, hogy $t > 0$ vagy azt, hogy $t < 0$. Figyelembe véve a kezdeti feltételt a $t > 0$ rész a releváns. Ezután használva a 21. Tételt kapjuk, hogy a kezdeti érték probléma megoldása létezik és egyértelmű a $0 < t < \infty$ intervallumon.

33. PÉLDA: Alkalmazzuk a 22. Tételt a következő kezdeti érték probléma megoldására:

$$y' = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)} \qquad y(0) = -1.$$

Megoldás: Vegyük észre, hogy

$$F(x,y) = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)} \text{ és } \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -\frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)^2}$$

értelmezett és folytonos mindenütt kivéve az $y \equiv 1$ horizontális egyenest pontjait. A $(0,-1)$ pont körül nyilván rajzolható olyan téglalap ami nem metszi az $y \equiv 1$ egyenest. Ezért a 22. Tétel értelmében a kezdeti érték problémának a megoldása létezik és egyértelmű VALAMELY olyan intervallumon amely a 0-át tartalmazza. Az azonban, hogy akármilyen hosszú olyan téglalapot rajzolhatunk a $(0,-1)$ pont körül, amely nem metszi az $y \equiv 1$ horizontális egyenest NEM jelenti azt, hogy a megoldás létezik minden x-re! Valójában a szétválasztható változójú differenciálegyenletet megoldva kapjuk, hogy a kezdeti érték probléma megoldása:

$$y(x) = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}.$$

Könnyen látható, hogy ez a kifejezés csak $x > -2$ esetén add megoldást ($x = -2$-ben $y(-2) = 1$ és az nem lehetséges mert, akkor az egyenletben 0-val kellene osztani és $x < -2$-re a gyök alatti kifejezés negatív hiszen $x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = (x+2)(x^2+2)$).

34. PÉLDA: Vizsgáljuk a következő kezdeti érték problémát a megoldás létezése és egyértelműsége szempontjából!

$$y' = y^{1/3}, \qquad y(0) = 0, t \geq 0.$$

Megoldás:

A 22. Tétel jelöléseit használva: $F(t, y) = y^{1/3}$. Mivel

$$\frac{\partial F}{\partial y}(t, y) = \frac{1}{3} \cdot y^{-2/3}$$

nincs értelmezve a $y = 0$-ban ezért ott nem is folytonos, tehát a 22. Tételt nem is alkalmazhatjuk ebben az esetben. Könnyű látni, hogy mind a két függvény

$$y(t) = -\left(\frac{2}{3} \cdot t\right)^{3/2} \text{ és } y(t) = \left(\frac{2}{3} \cdot t\right)^{3/2}$$

megoldása a kezdeti érték problémának. Sőt ennek a kezdeti érték problémának végtelen sok megoldása van. Nevezetesen minden $t_0 > 0$-ra a következő függvények megoldások a $\pm$ előjel tetszőleges választása esetén:

$$y(t) = \begin{cases} \pm\left[\frac{2}{3}(t - t_0)\right]^{3/2}, & \text{ha } t \geq t_0; \\ 0, & \text{ha } 0 \leq t < t_0. \end{cases}$$

35. PÉLDA: Vizsgáljuk a következő kezdeti érték problémát a megoldás létezése és egyértelműsége szempontjából!

$$y' = y^2, \qquad y(0) = 1.$$

A 22 Tétel feltételei teljesülnek ezért LÉTEZIK a $t = 0$ körül olyan intervallum, amelyben a megoldás létezik és egyértelmű. Sőt erre az ártatlan kinézetű egyenletre tekintve az ember azt gondolná, hogy a megoldás talán az egész számegyenesen létezik. Azonban, ha megoldjuk a szétválasztható változójú egyenletet látjuk, hogy a Cauchy feladat megoldása:

$$y = \frac{1}{1-t},$$

ami nem értelmezett $t = 1$-ben tehát a megoldás csak a $(-\infty, 1)$ nyílt intervallumon létezhet. Erre a jelenségre az egyenletünk alakja nem figyelmeztet!!!

10.4. Iránymező

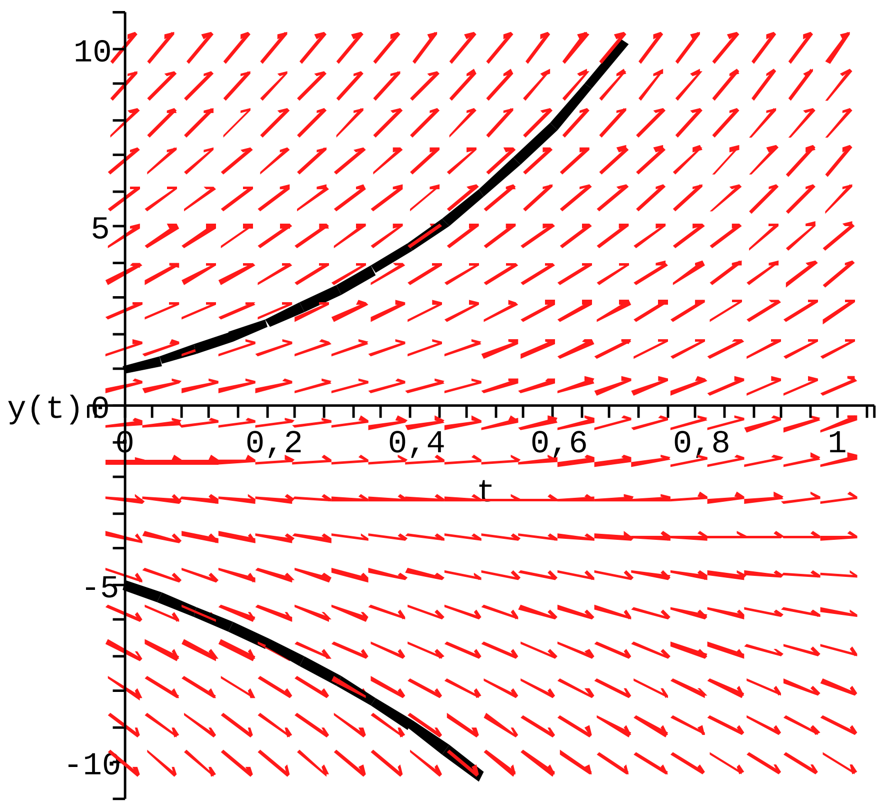
Tekintsük az

$$y' = F(t, y) \qquad y(t_0) = y_0 \tag{40}$$

kezdeti érték feladatot. Ha $F(t, y) = f(y) \cdot g(t)$, akkor mint tanultuk ez egy szétválasztható változójú egyenlet amit meg tudunk oldani. Ha $F(t, y) = \alpha(t) \cdot y(t) + \beta(t)$ valamilyen $\alpha(t), \beta(t)$ folytonos függvényekre, akkor a (40) egyenlet elsőrendű lineáris egyenlet és megint csak tanultuk, hogy hogyan lehet megoldani. Ezeken kívül még nagyon sok olyan eset van amikor a (40) kezdeti érték feladatot meg tudjuk oldani. Azonban olyan esetek is vannak amikor az egyenletet megoldására semmilyen módszert nem találunk vagy ugyan meg tudjuk oldani az egyenletet de a megoldást olyan bonyolult képlet adja ami nem mond semmit. Az egyik dolog amit ilyen esetben tehetünk ha megnézzük az *iránymezőt* (persze komputerrel). Az iránymezőt úgy kapjuk ha a ty sík nagyon sok (t,y) pontján keresztül megrajzoljuk annak az egyenesnek egy picike darabját, amelynek meredeksége $F(t, y)$. Mivel ez az egyenes a keresett megoldás érintője a t-ben ezen vonal elemek a keresett megoldások közelítését adják. Annál pontosabb közelítését minél több ponton keresztül rajzoljuk meg a fenti vonal elemeket.

Ezt az alábbiakban egy példán szemléltetjük: Tekintsük az $y' - 2y = 3e^t$ egyenletet! A Maple programot használva a következőket írjuk:

```
> ode := D(y)(t) - 2*y(t) = 3*exp(t);

                ode := D(y)(t) - 2 y(t) = 3 exp(t)

> with(DEtools):

> InitialValues := [[0,1],[0,-5]];

                InitialValues := [[0, 1], [0, -5]]

> DEplot(ode, y(t), t=0..1, y=-10..10, InitialValues, linecolor=black);
```



6. ábra. Iránymező az $y' - 2y = 3\mathrm{e}^t egyenletre.$

10.4.1. Autonóm egyenletek, stabilitás

Ha a fentiekben vizsgált $y' = F(t, y)$ egyenletben a $F(t, y)$ függvény nem függ a t változótól, akkor autonóm egyenletről beszélünk. Az autonóm egyenletek általános alakja tehát:

$$y' = f(y). \tag{41}$$

A továbbiakban ha csak mást nem mondunk mindig feltesszük , hogy az $f(y)$ függvény deriváltja létezik és folytonos. Ezért tehát a 22. Tétel értelmében a

$$y' = f(y) \qquad y(0) = y_0. \tag{42}$$

kezdeti érték feladat megoldása létezik és egyértelmű a $t = 0$ egy környezetében. Ilyen egyenlet volt például a normális növekedés egyenlete (31.Példa a 43.oldalon) vagy a 35. Példa a 48.oldalon. Az $f(y) = 0$ egyenlet (nem differenciálegyenlet csak sima algebrai egyenlet) megoldásait *kritikus pontoknak* vagy *egyensúlyi megoldásoknak* hívjuk. Az utóbbi elnevezésnek az az oka, hogy ha $f(y_0) = 0$, akkor az

$$y(t) \equiv y_0$$

konstans függvény megoldása a (41) egyenletnek. Ugyanis mivel ez a függvény egy konstans függvény a (41) egyenletnek mind a jobb mind a bal oldalán az azonosan nulla függvény szerepel. Ekkor tehát az $y(t) \equiv y_0$ konstans függvény megoldása (és az egyetlen megoldása) a (42) kezdeti érték feladatnak. Képzeljük el, hogy az $y(t)$ egy időben változó mennyiséget ír le, ahol t az idő. Ekkor az, hogy az $y(t) \equiv y_0$ megoldása a (42) feladatnak azt jelenti, hogy ha kezdetben $t = 0$ időpillanatban az $y(0)$ értéke y_0 volt, akkor az is marad. Mindez a tulajdonság abból következett, hogy $f(y_0) = 0$. Ezért nevezzük a f függvény zérus helyeit egyensúlyi megoldásoknak. Nézzük ezt egy konkrét példán:

36. PÉLDA:

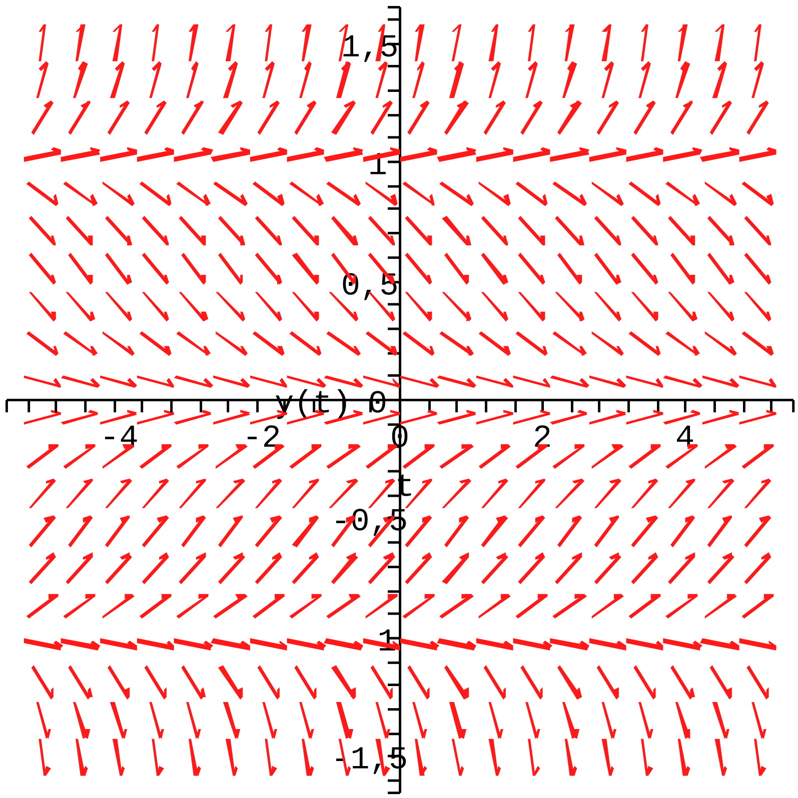
$$y' = (y - 1)y(y + 1).$$

Az egyensúlyi állapotok az $y = -1, 0, 1$. Az irány mezőt a 7. ábra mutatja. Az a 7. ábrán látható, hogy

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \infty, & \text{ha } y(0) > 1; \\ \lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0, & \text{ha } -1 < y(0) < 1; \\ \lim\limits_{t\to\infty} y(t) = -\infty, & \text{ha } y(0) < -1. \end{cases}$$

Általánoságban:

17. DEFINÍCIÓ: Az $y\,(t) \equiv y_0$ egyensúlyi helyzetet *Ljapunov- stabilnak* nevezzük, ha $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, hogyha $\varphi\,(t)$ az $y' = f\,(y)$-nak egy olyan megoldása, melyre $|\varphi\,(0) - y_0| < \delta$, akkor $|\varphi\,(t) - y_0| < \varepsilon\ \forall t$-re. Ellentétes esetben az $y = y_0$ egyensúlyi állapotot instabilnak hívjuk.



7. ábra. Az $y \equiv 1$ és $y \equiv -1$ egyensúlyi állapotok instabilok az $y \equiv 0$ asszimptotikusan stabil.

A fenti példában tehát $y = 0$ Lyapunov stabil de az $y = -1$ és az $y = 1$ instabil. Továbbá

18. DEFINÍCIÓ: Az $y(t) \equiv y_0$ egyensúlyi helyzet *aszimptotikusan stabil*, ha

(a) Ljapunov-stabil **és**

(b) $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t) = y_0$ teljesül az $y' = f(y)$ minden olyan $\varphi(t)$ megoldására, melyre $\varphi(0)$ az y_0-hoz elég közel van.

Ez tehát azt mutatja, hogy a fenti példa egyetlen olyan egyensúlyi állapota, amely nem instabil, nevezetesen az $y = 0$, nem csak Lyapunov stabil hanem valójában asszimptotikusan stabil.

37. PÉLDA: Vizsgáljuk az

$$y' = (y-1)y(y+1)^2.$$

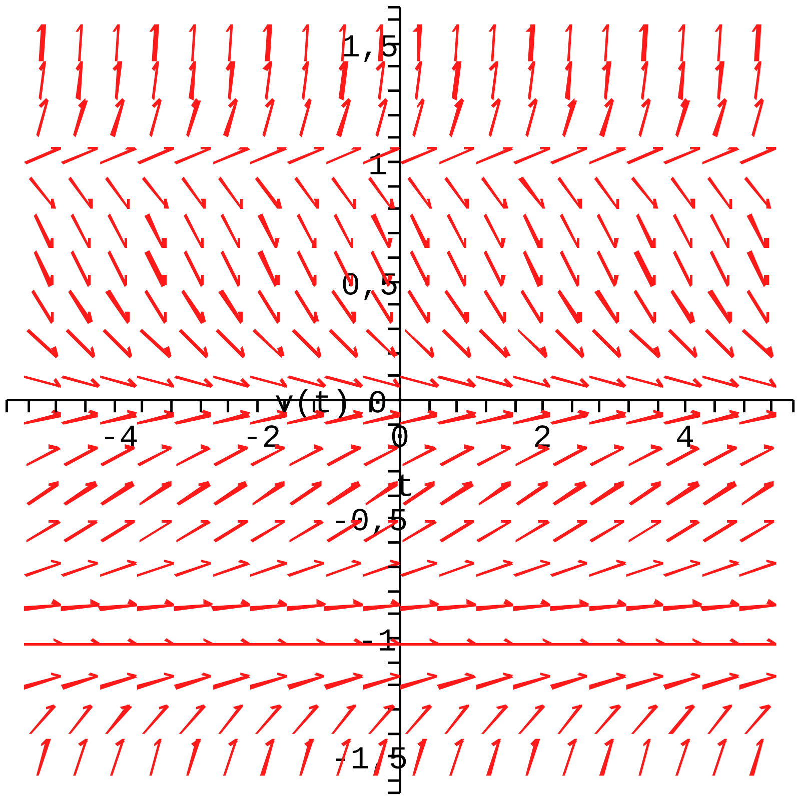
autonóm egyenletet egyensúlyi állapotait stabilitás szempontjából.

Megoldás: Az egyensúlyi helyzetek megint csak $y = -1$, $y = 0$, $y = 1$. A 8. ábra mutatja az iránymezőt.

Az a 8. ábrán látható, hogy

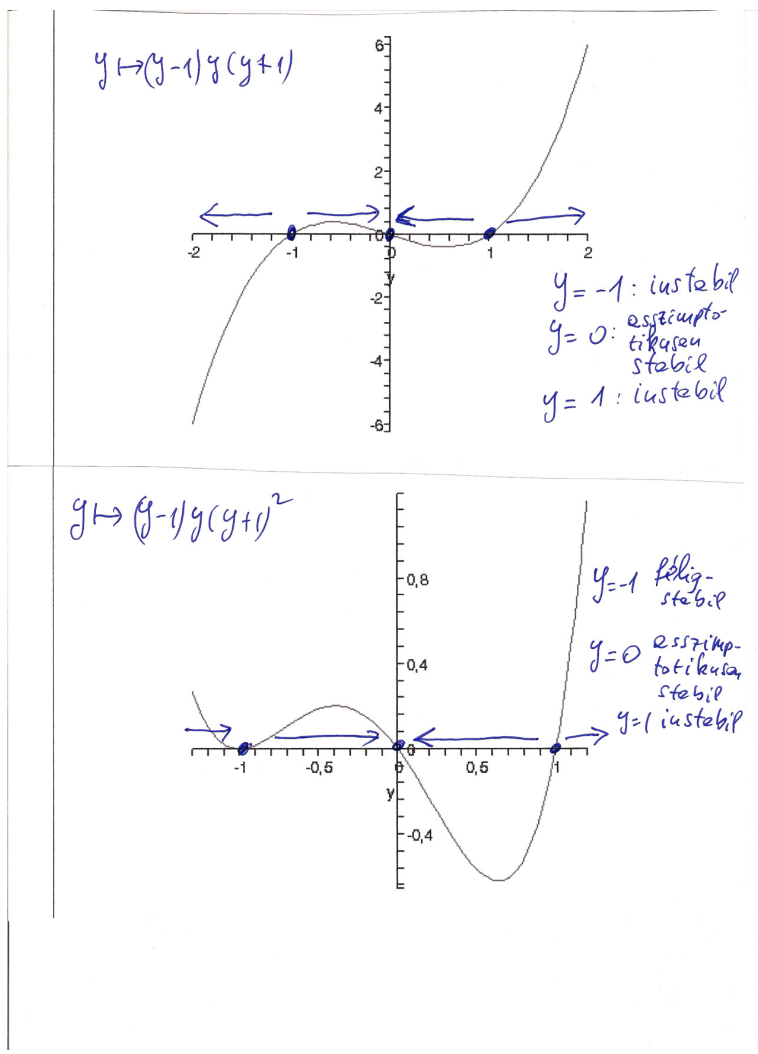
$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \infty, & \text{ha } y(0) > 1; \\ \lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0, & \text{ha } -1 < y(0) < 1; \\ \lim\limits_{t\to\infty} y(t) = -1, & \text{ha } y(0) < -1. \end{cases}$$

Ebből tehát nyilvánvaló, hogy megint csak az $y = 0$ stabil és a másik két egyensúlyi állapot pedig instabil. Azonban amiatt, hogy $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = -1$ teljesül, ha $y(0) < -1$ azt mondjuk, hogy az $y = -1$ egyensúlyi állapot *félig-stabil.*



8. ábra. Az $y \equiv 1$ instabil az $y \equiv -1$ félig-stabil, az $y \equiv 0$ asszimptotikusan stabil.

Fázis vonalak: Az egyensúlyi helyzetek stabilitását az iránymező felrajzolása nélkül is nagyon egyszerűen eldönthetjük ún. fázis vonalak segítségével. Először is lerajzoljuk az $f(y)$ függvény görbéjét és az ábránkon megjelöljük az $f(y)$ függvény zérus helyeit (vagyis az egyensúlyi állapotokat).Ez intervallumokra (két végtelen és néhány véges intervallumra) osztja a számegyenest. Ha egy ilyen intervallumon az $f(y) > 0$ akkor az intervallumra rajzolunk egy jobbra mutató nyilat, ha egy ilyen intervallumon $f(y) < 0$, akkor az intervallumra egy balra mutató nyilat rajzolunk. Így kapjuk a fázis vonalakat. Nézzük a fázis vonalakat először a 36. Példa utána pedig a 37. Példa differenciálegyenletére.



9. ábra. Fázis vonalak

Ha egy intervallumon a fázis vonal jobbra mutat az azért van mert ott $f(y) > 0$. Mivel $y' = f(y)$ ezért itt a megoldás növekszik. Fordítva, ha a fázis vonal balra mutat, akkor a megoldás csökken. Ez tehát azt adja, hogy ha egy egyensúlyi állapotot körülvevő két intervallum mindegyikén ezen egyensúlyi állapot felé mutat a nyíl, akkor az az egyensúlyi állapot asszimptotikusan stabil. Ha csak az egyik nyíl mutat az egyensúlyi állapot felé, akkor az egyensúlyi állapot félig stabil és ha mind a két nyíl az egyensúlyi állapottól ellenkező irányba mutat, akkor az egyensúlyi állapot instabil.

10.5. Euler formula

A célunk az, hogy definiáljuk az olyan kifejezéseket mint például

$$3^{2+4i},$$

i az imaginárius egység $i \cdot i = -1$. Vegyük észre, hogy ehhez elég értelmezni az e alapú és komplex kitevőjű hatványokat. Nevezetesen, használva, hogy $3 = \mathrm{e}^{\ln 3}$ kapjuk, hogy

$$3^{2+4i} = \mathrm{e}^{2\cdot\ln 3 + i4\cdot\ln 3}.$$

Tehát definiálnunk kell az $\mathrm{e}^{a+b\cdot i}$, $a, b \in \mathbb{R}$ számokat.

19. DEFINÍCIÓ: Valamely $z \in \mathbb{C}$-re

$$\mathrm{e}^z := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \tag{43}$$

Helyettesítsük ebbe a képletbe $z = i \cdot t$, ahol t egy valós szám. Ekkor:

$$\mathrm{e}^{it} = \underbrace{1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots}_{\cos t} + i \cdot \left(\underbrace{t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots}_{\sin t} \right) = \cos t + i \cdot \sin t.$$

Kapjuk tehát az ún. **Euler formulát**:

$$\underline{\mathrm{e}^{it} = \cos t + i \cdot \sin t, \qquad t \in \mathbb{R}.} \tag{44}$$

Ebből már könnyű meghatározni a 3^{2+4i} értékét. Nevezetesen:

$$\begin{aligned} 3^{2+4i} &= 9 \cdot 3^{4i} = 9 \cdot \Big(\underbrace{\mathrm{e}^{(\ln 3)}}_{3} \Big)^{4i} = 9 \cdot \mathrm{e}^{(4\ln 3)i} \\ &= 9 \cdot \Big(\underbrace{\cos(4\ln 3)}_{-0.3126103028} + \underbrace{\sin(4\ln 3))}_{-0.9498814656} \cdot i \Big) \\ &= -2.813492725 - 8.548933190 \cdot i. \end{aligned}$$

Az Euler formulát használva vegyük észre, hogy:

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{e}^{it} & = & \cos t + i \cdot \sin t \\
\mathrm{e}^{-it} & = & \cos(-t) + i \cdot \underbrace{\sin(-t)}_{-\sin(t)} = \cos t - i \cdot \sin t \\
+ \cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mathrm{e}^{it} + \mathrm{e}^{-it} & = & 2 \cos t \\
\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{-it} & = & 2i \sin t
\end{array}$$

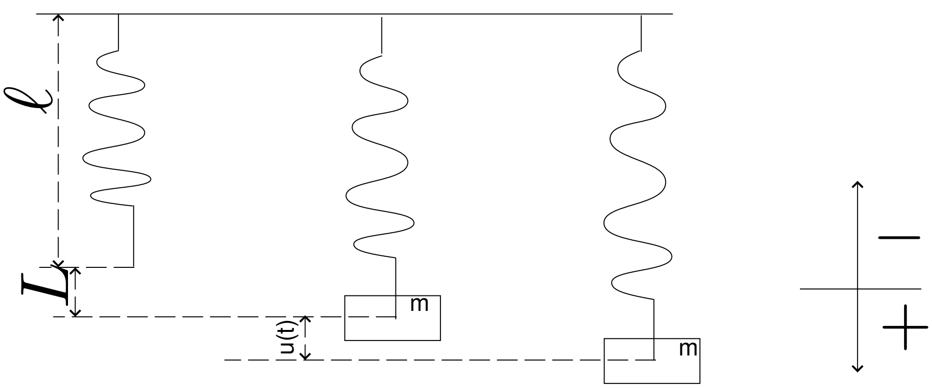
vagyis

$$\cos t = \frac{\mathrm{e}^{it} + \mathrm{e}^{-it}}{2}, \qquad \sin t = \frac{\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{-it}}{2i}. \tag{45}$$

Ezt a fontos képletet mi csak valós t-re használjuk, de a t komplex értékeire is igaz.

11. Másodrendű lineáris egyenletek

11.1. Csillapított harmonikus rezgőmozgás



10. ábra. Rugó

Egy vízszintes rúdra függesztünk egy rugót, melynek hossza eredetileg ℓ. Ezután erre a rúdra egy m tömegű testet helyezünk. Ekkor a test kitér L egységnyit majd egyensúlyba kerül. A testre ható erők :

Gravitációs erő: $w = mg$,

Hooke törvénye miatt:$F_s = -kL$.

Tehát ebben a pillanatban:

$$mg = -kL \tag{46}$$

Képzeljük el, hogy a testet kimozdítjuk és magára hagyjuk. Célunk a test mozgásának leírása súrlódási erő jelenléte esetén.

Newton törvénye szerint a testre ható erők eredője $f(t)$ egyenlő a tömeg szorozva a gyorsulással. Ha a testnek a $\ell+L$ szinttől való eltérését a t időben az $y(t)$ függvény adja meg, akkor:

a test sebessége: $y'(t)$,
a test gyorsulása: $y''(t)$.
Tehát Newton törvénye szerint: e

$$m \cdot y''(t) = f(t). \tag{47}$$

Az $f(t)$ a testre ható erők eredője. Tehát

$$m \cdot y''(t) = f(t) = \underbrace{mg}_{\text{gravitációs erő}} + \underbrace{(-k(L + y(t)))}_{\text{rugó erő}} + \underbrace{(-\gamma y'(t))}_{\text{surlódási erő}} + \underbrace{F(t)}_{\text{külső erő}} \tag{48}$$

Kihasználjuk, hogy a (46) egyenlet szerint: $mg = -kL$. Ezért (48)-et rendezve kapjuk, hogy

$$my'' + \gamma y' + ky = F(t) \tag{49}$$

másodrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet írja le a csillapított harmonikus rezgő mozgást. Ezért vizsgáljuk általában a másodrendű lineáris differenciálegyenleteket.

11.2. Az inhomogén lineáris egyenlet általános megoldása

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = r(t), \tag{50}$$

alakú egyenletek a **másodrendű lineáris egyenletek**, feltéve, hogy az $a_2(t), a_1(t)$ függvények folytonosak. Ha egy I (véges vagy végtelen) intervallumon az $a_2(t) \neq 0$, akkor vele leosztva kapjuk, az

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \tag{51}$$

egyenletet. Ebben a fejezetben azt tanuljuk, hogy az (51) alakú egyenletek hogyan lehet megoldani. Az (51) alakú egyenletet *inhomogénnek* nevezzük, ha $g(t) \neq 0$; *homogénnek* hívjuk, ha $g(t) = 0$.

Ebben az esetben is érvényes az a formula amit az elsőrendű lineáris egyenletek esetén tanultunk:

$$y_{i,\acute{a}lt} = Y_{h,\acute{a}lt} + y_{i,p} \tag{52}$$

Vagyis az (51) inhomogén egyenletet úgy oldjuk, meg, hogy először meghatározzuk a megfelelő

$$Y'' + p(t)Y' + q(t)Y = 0 \tag{53}$$

homogén egyenlet általános megoldását $Y_{h,ált}$ és ennek ismeretében kiszámoljuk az (51) egyenlet egy partikuláris megoldását vagyis az $y_{i,p}$ függvényt. Ezen az előadáson a homogén rész megoldási módszerét tanuljuk.

11.3. Homogén egyenletek

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \tag{54}$$

alakú

38. PÉLDA: 1. $y'' - \frac{2}{t}y' + \frac{2}{t^2}y = 0; \quad (t > 0)$

2. $y'' + y = 0$

3. $y'' - y = 0$

20. DEFINÍCIÓ: Azt mondjuk, hogy az $\{y_1(t), y_2(t)\}$ függvények az az (54) egyenlet fundamentális megoldásai, ha

1. $y_1(t), y_2(t)$ megoldásai az (54) egyenletnek

2. az $y_2(t)$ függvény NEM konstans szorosa az $y_1(t)$ függvénynek.

A (38) Példabeli egyenleteket tekintve:

$$y'' - \frac{2}{t}y' + \frac{2}{t^2}y = 0; \quad (t > 0)$$

esetén könnyen ellenőrizhető, hogy mind az $y_1(t) = t$ és az $y_2(t) = t^2$ megoldásai az egyenletnek és ezek nyilván nem konstans szorosai egymásnak tehát az $\{t, t^2\}$ függvény pár az egyenlet fundamentális megoldásai.

$$y'' + y = 0$$

egyenletnek az $y_1(t) = \cos t, y_2(t) = \sin t$ függvények megoldásai. mivel nem konstans szorosai egymásnak, ezért ők fundamentális megoldást képeznek.

$$y'' - y = 0$$

egyenletnek megoldásai az $y_1(t) = \mathrm{e}^t, y_2(t) = \mathrm{e}^{-t}$ függvények. Mivel nem konstans szorosai egymásnak, ezért ők fundamentális megoldást képeznek. Vegyük észre, hogy ugyan ennek az egyenletnek az $y_1(t) = \mathrm{sh}t, y_2(t) = \mathrm{ch}t$ függvények is megoldásaik. Mivel ezek sem konstans szorosai egymásnak, ezért ők **IS** fundamentális megoldást képeznek.

23. TÉTEL: Ha az $\{y_1, y_2\}$ függvények a homogén (54) fundamentális megoldása, akkor az (54) egyenlet **összes** megoldását megkapjuk

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \text{ alakban valamely } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ -re.} \tag{55}$$

Vagyis ha $\{y_1, y_2\}$ az (54) egyenlet fundamentális megoldása, akkor az (54) általános megoldása:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{56}$$

Ez a jelenség analóg a következőhöz: Legyen a tér valamely origón átmenő S síkjának két egymással nem párhuzamos vektora: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v_2} \in S$. Ekkor az S sík minden vektora $\mathbf{w}$ vektora előállítható $\mathbf{v}_1$-el és $\mathbf{v}_2$-vel párhuzamos komponensek összegeként. Ugyanez algebrailag: $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, úgy hogy

$$\mathbf{w} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2. \tag{57}$$

Az (55) és az (57) egyenleteknek ugyanaz a lényege, csak az előbbiben a $\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ szerepét az y, y_1, y_2 függvények játszák.

39. PÉLDA: Tekintsük a másodrendű lineáris homogén

$$y'' - \frac{2}{t} y' + \frac{2}{t^2} y = 0, \quad t > 0 \tag{58}$$

egyenletet. Szemrevételezéssel azonnal látható, hogy az $y_1(t) = t$ egy megoldása az egyenletnek. Próbálkozással hamar rájöhetünk arra is, hogy az $y_2(t) = t^2$ is megoldása az egyenletnek. Ezek nem szám szorosai egymásnak. Tehát az egyenletnek

$$\left\{ y_1(t) = t, y_2(t) = t^2 \right\}$$

fundamentális megoldása. Ebből azután az előző tétel alkalmazásával kapjuk, hogy az egyenlet általános megoldása:

$$y(t) = c_1 \cdot t + c_2 \cdot t^2, \quad t > 0.$$

11.3.1. Konstans együtthatós másodrendű homogén lineáris differenciálegyenletek.

Most azzal a speciális esettel foglalkozunk, amikor az együttható függvények konstansok, vagyis

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (a \neq 0). \tag{59}$$

Ebben az esetben egy másodfokú egyenlet (amit majd karakterisztikus a egyenletnek hívunk) megoldása nyomán kapott gyökökből azonnal kapjuk az (59) differenciálegyenlet fundamentális megoldását. Azonban meg kell különböztetnünk három esetet annak megfelelően, hogy a karakterisztikus egyenlet két különböző valós, két azonos valós- vagy egy komplex konjugáltpár gyökkel rendelkezik.

1. Ötlet: Keressük az (59) differenciálegyenlet megoldását

$$y(t) = \mathrm{e}^{r \cdot t},$$

alakban, ahol a r alkalmasan választott komplex vagy valós szám.

Ha a fenti ötletet akarjuk megvalósítani, akkor meg kell találnunk azokat a valós vagy komplex r számokat, melyekre az $y(t) = \mathrm{e}^{rt}$ megoldása az (59)-nek nevezett

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (a \neq 0).$$

differenciálegyenletnek. Ehhez vegyük észre, hogy $y(t) = \mathrm{e}^{rt}$ esetén

$$y' = r\mathrm{e}^{rt} \qquad y'' = r^2\mathrm{e}^{rt}.$$

Ezeket helyettesítjük a differenciálegyenletbe és osztunk e^{rt}-vel:

$$a \cdot r^2\mathrm{e}^{rt} + b \cdot r\mathrm{e}^{rt} + c \cdot \mathrm{e}^{rt} = 0 \qquad : \mathrm{e}^{rt}$$

kapjuk:

2. LEMMA: Legyenek r_1 és r_2 (akár valós, akár komplex) gyökei az

$$a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0 \tag{60}$$

ún. **karakterisztikus egyenletet**nek. Ekkor a

$$t \mapsto \mathrm{e}^{r_1 t} \text{ és a } t \mapsto \mathrm{e}^{r_2 t}$$

függvények az
$$ay'' + by' + cy = 0$$
differenciálegyenlet megoldásai. Ha $r_1 \neq r_2$, akkor az
$$y_1 = \mathrm{e}^{r_1 t} \text{ és az } y_2 = \mathrm{e}^{r_2 t}$$
függvények a differenciálegyenlet fundamentális megoldását alkotják.

Három esetet különböztetünk meg:

I.eset $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ és $r_1 \neq r_2$. Ekkor a differenciál egyenlet általános megoldása:
$$y = c_1 \mathrm{e}^{r_1 t} + c_2 \mathrm{e}^{r_2 t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{61}$$

II. eset $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ de $r := r_1 = r_2$. Vegyük észre, hogy ekkor a
$$t \mapsto t \cdot \mathrm{e}^{rt}$$
függvény is megoldás. Ezért az alaprendszer:
$$\mathrm{e}^{rt}, t \cdot \mathrm{e}^{rt}.$$
Tehát az általános megoldás:
$$y(t) = c_1 \cdot \mathrm{e}^{rt} + c_2 \cdot t \cdot \mathrm{e}^{rt}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

III.eset $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$. A fenti Lemma szerint az $\{\mathrm{e}^{r_1 t}, \mathrm{e}^{r_2 t}\}$ egy fundamentális megoldás. Igen ám de ezek komplex függvények és mi valós függvényekből álló megoldást akarunk! Itt fel kell használnunk azt az A1 tárgyban tanult tételt, hogy ha az r_1, r_2 számok **komplex** gyökei a **valós** együtthatós
$$a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0$$
másodfokú egyenletnek, akkor ők egymás komplex konjugáltjai. Vagyis, ha $r_1 = u + i \cdot v$, akkor $r_2 = u - i \cdot v$, ahol $u, v \in \mathbb{R}$. Ekkor tehát
$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{r_1 t} &= \mathrm{e}^{ut}\mathrm{e}^{ivt} = \mathrm{e}^{ut} \cdot (\cos(vt) + i \sin(vt)) \\
\mathrm{e}^{r_2 t} &= \mathrm{e}^{ut}\mathrm{e}^{-ivt} = \mathrm{e}^{ut} \cdot (\cos(vt) - i \sin(vt)) \\
\frac{\mathrm{e}^{r_1 t} + \mathrm{e}^{r_2 t}}{2} &= \mathrm{e}^{ut} \cos(vt) \\
\frac{\mathrm{e}^{r_1 t} - \mathrm{e}^{r_2 t}}{2i} &= \mathrm{e}^{ut} \sin(vt)
\end{aligned}$$

Vagyis ha $r_1 = u + i \cdot v$, $r_2 = u - i \cdot v$ komplex gyökök, akkor az

$$y_1 = \mathrm{e}^{ut}\cos(vt) \qquad y_2 = \mathrm{e}^{ut}\sin(vt)$$

az egyenlet egy fundamentális megoldása és az egyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 \cdot \mathrm{e}^{ut}\cos(vt) + c_2 \cdot \mathrm{e}^{ut}\sin(vt). \tag{62}$$

40. PÉLDA: Oldjuk meg a következő kezdeti érték feladatot:

$$y'' + y' - 30y = 0, \qquad y(0) = 5;\ y'(0) = -8.$$

Megoldás: A karakterisztikus egyenlet:

$$r^2 + r - 30 = 0.$$

Ennek gyökei: $r_1 = 5, r_2 = -6$. Tehát

$$y_1 = \mathrm{e}^{5t}, \qquad y_2 = \mathrm{e}^{-6t}$$

az egyenlet fundamentális megoldása. Vagyis az egyenlet általános megoldása:

$$y = c_1\mathrm{e}^{5t} + c_2\mathrm{e}^{-6t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Az általános megoldás deriváltja:

$$y' = 5c_1\mathrm{e}^{5t} - 6c_2\mathrm{e}^{-6t}.$$

Behelyettesítve:

$$\begin{aligned} 5 = y(0) &= c_1 + c_2 \\ -8 = y'(0) &= 5c_1 - 6c_2. \end{aligned}$$

Ebből adódik, hogy $c_1 = 2$ és $c_2 = 3$. Vagyis a kezdeti érték feladat megoldása:

$$y = 2\mathrm{e}^{5t} + 3\mathrm{e}^{-6t}.$$

41. PÉLDA: Oldjuk meg a következő kezdeti érték feladatot:

$$y'' - 6y' + 9y = 0, \qquad y(0) = 1;\ y'(0) = 7.$$

Megoldás: A karakterisztikus egyenlet:

$$r^2 - 6r + 9 = 0.$$

Ennek gyökei: $r = 3$ kétszeres gyök. Tehát a

$$y_1(t) = \mathrm{e}^{3t}, \qquad y_2(t) = t \cdot \mathrm{e}^{3t}$$

fundamentális megoldás. Ezért az általános megoldás:

$$y = c_1 \cdot \mathrm{e}^{3t} + c_2 \cdot t \cdot \mathrm{e}^{3t}.$$

Az általános megoldás deriváltja:

$$y' = 3c_1\mathrm{e}^{3t} + c_2\mathrm{e}^{3t} + 3c_2t\mathrm{e}^{3t}.$$

Behelyettesítve:

$$\begin{aligned} 1 = y(0) &= c_1 \\ 7 = y'(0) &= 3c_1 + c_2. \end{aligned}$$

Tehát $c_1 = 1$ és $c_2 = 4$. Vagyis a kezdeti érték feladat megoldása:

$$y = \mathrm{e}^{3t} + 4t\mathrm{e}^{3t}.$$

42. PÉLDA: Oldjuk meg a következő kezdeti érték feladatot:

$$y'' - 4y' + 13y = 0, \qquad y(0) = 2;\ y'(0) = 1.$$

Megoldás: A karakterisztikus egyenlet:

$$r^2 - 4r + 13 = 0.$$

Ennek gyökei: $r_1 = 2 + 3i$ és $r_2 = 2 - 3i$. Tehát a

$$y_1(t) = \mathrm{e}^{2t}\cos(3t), \qquad y_2(t) = \mathrm{e}^{2t} \cdot \sin(3t)$$

fundamentális megoldás. Ezért az általános megoldás:

$$y = c_1 \cdot \mathrm{e}^{2t}\cos(3t) + c_2\mathrm{e}^{2t} \cdot \sin(3t).$$

Az általános megoldás deriváltja:

$$\begin{aligned} y' &= 2c_1 \mathrm{e}^{2t}\cos(3t) - 3c_1\mathrm{e}^{2t}\sin(3t) \\ &+ 2c_2\mathrm{e}^{2t}\sin(3t) + 3c_2\mathrm{e}^{2t}\cos(3t) \end{aligned}$$

Behelyettesítve:

$$\begin{aligned} 2 = y(0) &= c_1 \\ 1 = y'(0) &= 4 + 3c_2. \end{aligned}$$

Tehát $c_1 = 2$ és $c_2 = -1$. Vagyis a kezdeti érték feladat megoldása:

$$y = 2\mathrm{e}^{2t}\cos(3t) - \mathrm{e}^{2t}\sin(3t).$$

11.3.2. Konstans együtthatós másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenletek.

Tegyük fel, hogy egy véges vagy végtelen I intervallum minden pontjában értelmezett és folytonos a $p(t), q(t), g(t)$ függvények mindegyike. Most azzal foglalkozunk, hogy a

$$ay'' + by' + cy = g(t), \qquad a \neq 0 \text{ és } t \in I \tag{63}$$

konstans együtthatós másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenletet hogyan lehet megoldani. Már tanultuk, hogy a (63) egyenlet megoldásának első lépése az, hogy felírjuk a megfelelő homogén egyenletet, vagyis az

$$aY'' + bY' + cY = 0 \tag{64}$$

egyenletet. Meghatározzuk ennek $Y_{h,lt}$ általános megoldását az előző fejezetben tanult módon. Ezután már csak a (63) inhomogén egyenlet **egyetlen** $y_{i,p}$ megoldását kell megtalálnunk hogy felírhassuk az inhomogén (63) egyenlet általános megoldását:

$$y_{i,\acute{a}lt} = Y_{h,\acute{a}lt} + y_{i,p}. \tag{65}$$

Ennek a fejezetnek a célja két olyan módszer ismertetése, amelyek segítségével megtalálhatjuk a fenti $y_{i,p}$ megoldást.

Először az ún. "**próbafüggvény módszer**t" tárgyaljuk.

Próba függvény módszer: Ezt nem mindig lehet alkalmazni, csak ha a (63) egyenletben a $g(t)$ függvény alakja

$$g(t) = \mathrm{e}^{ut} \left(A_n(t) \cos(vt) + B_m(t) \sin(vt) \right), \tag{66}$$

ahol $A_n(t), B_m(t)$ olyan polinomok melyeknek rendje, n és m Vagyis valamely $a_0, \ldots, a_n$ és $b_0, \ldots, b_m$ valós számokra

$$A_n(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0, \qquad B_m(t) = b_m t^m + b_{m-1} t^{m-1} + \cdots + b_1 t + b_0 \tag{67}$$

43. PÉLDA: A következő függvények mind (66) alakúak a konstansok és polinomok mellékelt választásaival:

1. $g(t) = 1 - 30t$,
$$u = 0, v = 0, n = 1, A_n(t) = 1 - 30t.$$
2. $g(t) = \mathrm{e}^{5t}$,
$$u = 5, v = 0, n = 0, A_0(t) \equiv 1,$$
3. $g(t) = \mathrm{e}^{-6t} \cos(3t)$,
$$u = -6, v = 3, n = 0, A_0(t) \equiv 1, m = 0, B_m(t) \equiv 0.$$
4. $g(t) = t^2$,
$$u = 0, v = 0, m = 2, A_2(t) = t^2.$$
5. $g(t) = t\mathrm{e}^{7t}$
$$u = 7, v = 0, n = 1, A_1(t) = t.$$

A (63) egyenlet egy $y_{i,p}$ partikuláris megoldásának próbafüggvény módszerrel történő meghatározását egy konkrét példán ismertetjük.

$$y'' + y' - 30y = \mathrm{e}^{5t}. \tag{68}$$

1. Megoldjuk a (68) egyenletnek megfelelő
$$Y'' + Y' - 30Y = 0$$
HOMOGÉN egyenletet. Ennek felírjuk a karakterisztikus egyenletét és meghatározzuk ennek gyökeit. Ez az egyenlet előfordult a 40. Példában ezért mint ott láttuk a karakterisztikus egyenlet gyökei:
$$r_1 = 5 \text{ és } r_2 = -6.$$

2. Most meghatározzuk a (66) formulához tartozó u és v számokat. Mint a (43). Példa 2. részében láttuk ezek:

$$u = 5, v = 0.$$

3. Legyen $s \in \{0, 1, 2\}$ definíció szerint az $u + i \cdot v$ komplex szám multiplicitása a karakterisztikus egyenlet gyökei között. Ez azt jelenti, hogy

   (a) $s = 0$, ha $u + i \cdot v$ nem szerepel a karakterisztikus egyenlet gyökei között,

   (b) $s = 1$ ha $u + i \cdot v$ egyszeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek,

   (c) $s = 2$ ha a karakterisztikus egyenletnek egyetlen, kétszeres multiplicitású gyöke van, ami éppen egyenlő $u + i \cdot v$-vel.

   A mi esetünkben $u + i \cdot v = 5$, ami a karakterisztikus egyenlet gyökei között egyszer szerepel, ezért

$$s = 1.$$

   Ezek után a (68) egyenlet egy $y_{i,p}$ partikuláris megoldását kereshetjük

$$y_{i,p} = t^s \mathrm{e}^{ut} \left(P_k(t)\cos(vt) + Q_k(t)\sin(vt)\right) \tag{69}$$

   alakban, ahol

$$k := \max\{n, m\}$$

   és

$$P_k(t) = p_k t^k + \cdots p_1 t + p_0 \quad Q_k(t) = q_k t^k + \cdots q_1 t + q_0$$

   általános alakú k-ad fokú polinomok.

   A mi általunk vizsgált speciális esetben: $n = m = 0$ tehát $k = 0$. Az általános 0-ad fokú polinomok a konstans függvények. Ezért a mi speciális esetünkben a (69) alakja

$$y_{i,p} = C \cdot \mathrm{e}^{5t} \cdot t. \tag{70}$$

   Annyi maradt mindössze, hogy a fenti C konstanst meg kell határoznunk az $y_{i,p} = C \cdot \mathrm{e}^{5t} \cdot t$ függvénynek az eredeti (68) egyenletbe való vissza helyettesítésével. Ehhez kellenek az első és a második deriváltak:

$$y'_{i,p} = C \cdot e^{5\,t} + 5 \cdot C\,te^{5\,t} \text{ és } y''_{i,p} = 10 \cdot C\,e^{5\,t} + 25 \cdot C\,te^{5\,t}.$$

Ezeket a (68) egyenletbe vissza írva kapjuk:

$$\underbrace{10C\mathrm{e}^{5t} + 25Ct\mathrm{e}^{5t}}_{y''(t)} + \underbrace{C\mathrm{e}^{5t} + 5C\mathrm{e}^{5t}}_{y'(t)} - 30\underbrace{Ct\mathrm{e}^{5t}}_{y(t)} = \mathrm{e}^{5t}.$$

Innen kapjuk, hogy $C = \frac{1}{11}$: Vagyis

$$y_{i,p} = \frac{1}{11}t\mathrm{e}^{5t}.$$

Ezért:

$$y_{i,ált} = Y_{h,ált} + y_{i,p} = \underbrace{C_1\mathrm{e}^{5t} + C_2\mathrm{e}^{-6t}}_{Y_{h,ált}} + \underbrace{\frac{1}{11}t\mathrm{e}^{5t}}_{y_{i,p}}.$$

Konstans variációs módszer: Ezt a módszert is az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának meghatározására használjuk. Abban különbözik az előző módszertől, hogy

- bármilyen **folytonos** jobb oldali $g(t)$ függvény esetén a (63) egyenlet megoldható.
- nem csak konstans de függvény együtthatós másodrendű lineáris inhomogén egyenletek partikuláris megoldására is használható. Vagyis ha a $p(t), q(t), g(t)$ függvények folytonosak az I intervallumon és az

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \qquad t \in I \tag{71}$$

egyenlet homogén részének

$$Y'' + p(t)Y' + q(t)Y = 0$$

ismerjük egy fundamentális megoldását, a akkor konstans variációs módszerrel megkapjuk a (71) egyenlet egy $y_{i,p}$ partikuláris megoldását.

- A legtöbb olyan esetben mikor az egyenlet konstans együtthatós és jobb oldali $g(t)$ függvény (66) alakú az előbb tanult próbafüggvény módszer kevesebb számolással ad eredményt. Tehát a most bemutatásra kerülő módszer sokkal általánosabb (működik függvény együtthatós esetben is és nem csak speciális jobboldalra), de azért amikor lehet próba függvény módszert jobb választani.

A (71) egyenlet egy partikuláris megoldásának meghatározása konstans variációs módszerrel egy példán keresztül:

Tekintsük a

$$y'' - \frac{2}{t}y' + \frac{2}{t^2}y = 2t; \qquad t > 0 \tag{72}$$

másodrendű lineáris inhomogén függvény együtthatós differenciálegyenletet. Próbálgatással könnyen látható, hogy mint az

$$y_1(t) = t \text{ és } y_2(t) = t^2$$

függvények fundamentális megoldását képezik az

$$Y'' - \frac{2}{t}Y' + \frac{2}{t^2}Y = 0 \tag{73}$$

homogén egyenletnek. Tehát ezen homogén egyenlet általános megoldása:

$$Y_{h,alt} = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) = C_1 t + C_2 t^2 \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

A módszer ötlete az, hogy a (72) egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y_{i,p} = C_1(t) \cdot y_1(t) + C_2(t) \cdot y_2(t) = C_1(t) \cdot t + C_2(t) \cdot t^2 \tag{74}$$

alakban keressük. Vagyis keressük azon $C_1(t), C_2(t)$ **függvényeket**, melyekre a fenti $y_{i,p} = C_1(t) \cdot t + C_2(t) \cdot t^2$ a (73) egyenlet egy megoldása lesz. Be lehet látni (itt nincs rá időnk), hogy a keresett $C_1(t), C_2(t)$ függvényeket megkapjuk, ha megoldjuk a keresett függvények $C_1'(t), C_2'(t)$ deriváltjaira vonatkozó

$$\begin{aligned} C_1'(t)y_1(t) + C_2'(t)y_2(t) &= 0 \\ C_1'(t)y_1'(t) + C_2'(t)y_2'(t) &= g(t) \end{aligned} \tag{75}$$

egyenletet. Ez a mi speciális esetünkben ($y_1(t) = t, y_2(t) = t^2$):

$$\begin{aligned} C_1'(t) \cdot t + C_2'(t) \cdot t^2 &= 0 \\ C_1'(t) \cdot 1 + C_2'(t) \cdot 2t &= 2t. \end{aligned} \tag{76}$$

Ennek megoldása

$$C_1'(t) = -2t, \qquad C_2'(t) \equiv 2.$$

Ezt integrálva (konstansok nélkül mert csak egy partikuláris megoldást keresünk):

$$C_1(t) = -t^2 \text{ és } C_2(t) = 2t.$$

Tehát ezt (74)-ba vissza írva:

$$y_{i,p} = C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t) = -t^2 \cdot t + 2t \cdot t^2 = t^3.$$

Vagyis az általános megoldás:

$$y_{i,ált} = Y_{h,ált} + y_{i,p} = \underbrace{a \cdot t + b \cdot t^2}_{Y_{h,ált}} + \underbrace{t^3}_{y_{i,p}}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

11.4. Rezgőmozgás súrlódás nélkül

Térjünk vissza a harmonikus rezgő mozgáshoz 10. ábra. Ekkor mint láttuk a test mozgását a (49) formula írja le. Ha feltesszük, hogy nincs súrlódás és a külső erő $F(t) = F_0 \cos \omega t$, ahol F_0, ω konstansok, akkor a (49) formulában $\gamma = 0$, vagyis a test mozgását a

$$my'' + ky = F_0 \cos \omega t \tag{77}$$

differenciálegyenlet írja le. Legyen $\omega_0 := \sqrt{k/m}$. Ekkor ω_0-át a rendszer természetes frekvenciájának hívjuk, ugyanis a homogén

$$mY'' + kY = 0$$

egyenlet általános megoldása

$$Y_{h,alt} = C_1 \cdot \cos \omega_0 t + C_2 \cdot \sin \omega_0 t.$$

Abban az esetben ha a külső erő ω frekvenciája nem egyenlő az ω_0-al a (77) egyenlet általános megoldása:

$$y_{i,alt} = C_1 \cdot \cos \omega_0 t + C_2 \cdot \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \cos \omega t. \tag{78}$$

Nézzük ezt egy konkrét esetben:

44. PÉLDA: Legyen ω egy 1-hez közeli szám. Vizsgáljuk a

$$y'' + y = 0.5\cos\omega t \qquad y(0) = 0, y'(0) = 0$$

kezdeti érték feladat megoldásának viselkedését, amint $\omega \to 1$.

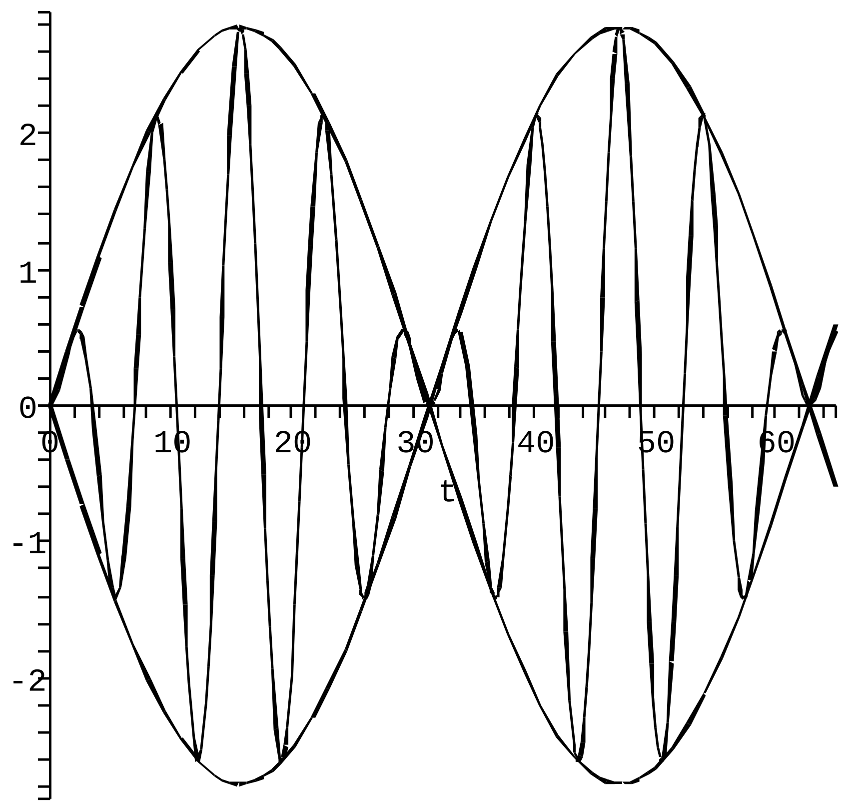
Az fent ismertetett módszerrel könnyen látszik, hogy a megoldás:

$$y = \frac{\cos(\omega t) - \cos(t)}{2(1-\omega^2)} = \frac{1}{1-\omega^2}\sin\frac{(1-\omega)t}{2} \cdot \sin\frac{(1+\omega)t}{2}. \tag{79}$$

Speciálisan az $\omega = 0.8$ esetben ez:

$$y(t) = 2.77778 \cdot \sin(0.1t)\sin(0.9t).$$

és a megoldást grafikonját a a 11.4. ábra mutatja.



11. ábra. A $\pm 2.77778 \cdot \sin(0.1t)$ és a $2.77778 \cdot \sin(0.1t)\sin(0.9t)$ függvények

12. Hiányos másodrendű diff.egyenletek

Egy másodrendű differenciálegyenlet általános alakja:

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{80}$$

ahol tehát F egy olyan formula ami közvetlenül függ**het** mind az

$$x, \ y, \ y' \ \text{ és } y''$$

-től (nem feltétlenül függ mindtől de függhet mindtől). Például

$$\underbrace{((y'')^5 + \sin(y'')^3 + \cos(y') + y)^{\tan x} - \cos x}_{F(x,y,y',y'')} = 0.$$

Ha képesek vagyunk az y''-öt kifejezni a (80) formulából, akkor a differenciálegyenletet megadhatjuk ún. *explicit* alakban. Vagyis

$$y'' = f(x, y, y') \tag{81}$$

alakban. A legtöbb esetben amivel itt találkozunk a differenciálegyenletet fel tudjuk írni explicit alakban de azért mi itt mindig azt az általános tárgyalás módot követjük, hogy feltételezzük, hogy a diferenciálegyenletünk implicit alakban adott. Általánosságban nem tudunk olyan módszert amivel egy akármilyen (80) alakú differenciálegyenetet meg tudnánk oldani. Azonban abban a speciális esetben, ha a (80)-ban szereplő $F(x, y, y', y'')$ valójában nem függ az

$$x,\ y,\ y' \text{ és } y''$$

mindegyikétől, tehát az F képletéből az $x,\ y,\ y'$ valamelyike hiányzik, akkor kapjuk a **hiányos másodrendű differenciálegyenleteket**, melyek megoldásának módszerét példákon keresztül szemléltetjük (az y'' nem hiányozhat mert akkor az egyenlet nem lenne másodrendű).

Hiányosnak nevezünk egy másodrendű diff.egyenletet, ha az x, y, y', közül legalább az egyik hiányzik. Most osztályozzuk a hiányos másodrendű diff.egyenleteket aszerint, hogy az x, y, y' közül melyik hiányzik és mindegyik esetben megmondjuk, hogyan találhatjuk meg a megoldást.

1. *Ha y és y' hiányzik:* Ekkor $y'' = f(x)$. A feladatot $f(x)$ kétszeres integrálásával oldhatjuk meg.

   45. PÉLDA: $y'' = 5 + \sin 3x$. Ekkor $y' = \int (5 + \sin 3x)\, dx = 5x - \frac{\cos 3x}{3} + C_1$. Tehát $y = \int \left(5x - \frac{\cos 3x}{3} + C_1\right) dx = \frac{5}{2}x^2 - \frac{\sin 3x}{9} + C_1 x + c_2$.

2. *Ha y hiányzik.* Ez az $F(x, y', y'') = 0$ alak. A megoldás kulcsa az, hogy a

   $$p(x) = y'(x)$$

   helyettesítést kell alkalmazni, ekkor $y''(x) = p'(x)$.

46. PÉLDA: Oldjuk meg az

$$\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)y''-xy'=0, \left\{ \begin{array}{c} y\left(0\right)=0 \\ y'\left(0\right)=3 \end{array} \right\}$$

Cauchy feladatot!

Megoldás: Mivel $y'=p\left(x\right)$ ezért $y''=p'\left(x\right)$. Ezzel a helyettesítéssel az egyenlet a

$$\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)p'-xp=0$$

szétválasztható változójú diff.egyenletbe megy át. Ennek megoldása: $p=c\left(1+x^2\right)$. Tehát $y'=c\left(1+x^2\right)$. Innen pedig az általános megoldás:

$$y_{\acute{a}lt}=c\left(x+\frac{x^3}{3}\right)+K.$$

A Cauchy feladat megoldását úgy kapjuk, hogy behelyettesítünk $x=0$-át mind az $y_{\acute{a}lt}$, mind az $y'_{\acute{a}lt}$ képletébe:

$$\begin{array}{c} y\left(0\right)=K=0 \\ y'\left(0\right)=c=3 \end{array}.$$

Tehát a Cauchy feladat megoldása: $y=3x+x^3$.

47. PÉLDA: Függesszünk fel egy homogén állandó keresztmetszetű γ fajsúlyú hajlékonynak és nyúlhatatlannak feltételezett kötelet az A és B pontokban. Határozzuk meg azt az $y(x)$ függvényt, amely a kötél alakját meghatározza, ha a kötelet csak saját súlya terheli.

Megoldás: Egyszerű fizikai megfontolások mutatják, hogy valamely V konstansra, az $y(x)$ függvényre teljesül, hogy:

$$y''=\frac{\gamma}{V}\sqrt{1+(y')^2}. \tag{82}$$

Ebből a hiányos másodrendű egyenletből hiányzik például az y. Tehát a következő helyettesítést használhatjuk:

$$y'=p(x), \qquad y''=p'(x).$$

Ezzel a differenciálegyenletünk alakja:

$$\frac{dp}{dx} = p' = \frac{\gamma}{V}\sqrt{1+p^2}.$$

Ez egy szétválasztható változójú egyenlet,

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{\gamma}{V} \cdot dx,$$

melynek megoldása:

$$y'(x) = p(x) = \sinh \frac{\gamma}{V}(x + C - 1).$$

Integrálva kapjuk, hogy

$$y = \frac{V}{\gamma} \cosh\left(\frac{\gamma}{V}(x + C_1)\right) + C_2.$$

Ebben három konstans van: C_1, C_2 és V. Ezek meghatározásához három egyenlet kell. Ezek felírásához a következő három adatot használjuk:

- a kötél átmegy az $A = (a_1, a_2)$ ponton
- a kötél átmegy az $B = (b_1, b_2)$ ponton
- a kötél hossza egy adott ℓ szám.

Ezen három adatnak megfelelő három egyenlet sorrendben:

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{V}{\gamma} \cosh\left(\frac{\gamma}{V}(a_1 + C_1)\right) + C_2. \\
b_2 &= \frac{V}{\gamma} \cosh\left(\frac{\gamma}{V}(b_1 + C_1)\right) + C_2. \\
s &= \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1 + (y')^2} = \frac{V}{\gamma}\left[\sinh\left(\frac{\gamma}{V}[a_2 + C_1]\right) - \sinh\left(\frac{\gamma}{V}[a_1 + C_1]\right)\right]
\end{aligned}$$

Ebből a három egyenletből az aktuális C_1, c_2, V konstansok értékei kiszámolhatók.

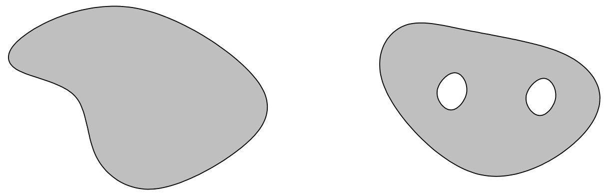
3. *Ha x hiányzik.* Ekkor az egyenlet $F(y, y', y'')$ alakú. Ebben az esetben az
$$y' = p(y)$$
helyettesítést kell alkalmazni. Ekkor
$$y'' = \frac{dp(y(x))}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}y' = \frac{dp}{dy}p.$$
48. PÉLDA: Oldjuk meg az $yy'' = 2(y')^2 - 2y'$ egyenletet.

Megoldás: Az egyenletbe helyettesítjük az $y' = p$ és a $y'' = \frac{dp}{dy}p$ összefüggéseket. Így kapjuk az
$$y\frac{dp}{dy}p = 2p^2 - 2p$$
szétválasztható változójú diff.egyenletet (itt y a változó és $p = p(y)$ az y függvénye). Ennek megoldása a $p \equiv 0$ és a $p = c^2y^2 + 1$. Felhasználva, hogy $y' = p$ kapjuk, hogy $y \equiv C$ és $y = \frac{1}{c}tg(cx + c_2)$.

4. Ha az y' hiányzik akkor csak nagyon speciális típusokat tudunk megoldani.

13. Egzakt differenciálegyenletek

Az
$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$
differenciálegyenlet egzakt, ha a
$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$$
feltétel teljesül, és mind $M(x, y)$, mind $N(x, y)$ függvények parciális deriváltjai léteznek és folytonosak egy olyan tartományon, melyben nincsenek lyukak. Az ilyen tartományokat egyszeresen összefüggőnek hívjuk.



a b

24. TÉTEL: Ha $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$ és mind $M(x,y)$ mind $N(x,y)$ függvények parciális deriváltjai léteznek és folytonosak egy egyszeresen összefüggő tartományon, akkor létezik olyan $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ függvény amelyre:

$$M = \frac{\partial F}{\partial x} \text{ és } N = \frac{\partial F}{\partial y}$$

vagyis $grad\,(F) = (M, N)$.

Ebben az esetben azt mondjuk, hogy a F függvény a **potenciálfüggvénye** az

$$(x, y) \mapsto (N(x, y), M(x, y))$$

vektormezőnek. Általánosságban egy vektormező potenciálfüggvénye lehet, hogy nem létezik. Viszont ha létezik, akkor meg egész bizonyos, hogy nem egyértelmű. Ha ugyanis $F(x, y)$ egy potenciálfüggvénye az

$$(x, y) \mapsto (N(x, y), M(x, y))$$

vektormezőnek, akkor $F(x, y) + C$, ahol a C egy tetszőleges konstans, szintén potenciálfüggvénye ugyanezen vektormezőnek. Tehát a potenciálfüggvény csak additív konstans erejéig meghatározott. Ha a potenciál függvény létezik, akkor a sík valamely A pontjából valamely B pontjába történő elmozdulás során az

$$(x, y) \mapsto (N(x, y), M(x, y))$$

erőtér ellenében végzett munka nem függ attól, hogy milyen úton megyünk A-ból B-be és a munkát az $F(B) - F(A)$ különbség adja.

Visszatérve a fenti defferenciálegyenletünkhöz, ha az

$$(x, y) \mapsto (N(x, y), M(x, y))$$

vektormezőre létezik F potenciál függvény akkor az

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

differenciálegyenletet tehát exact differenciálegyenletnek hívjuk és általános megoldását az

$$F(x,y) = C$$

implicit alakban kaphatjuk meg.

49. PÉLDA: Oldjuk meg a

$$y'\left(3x^4y^2 - x^2\right) + \left(4x^3y^3 - 2xy\right) = 0$$

diff.egyenletet.

Megoldás: Használjuk fel, hogy $y' = \frac{dy}{dx}$ és formálisan szorozzuk meg az egyenlet mind két oldalát dx-el. Kapjuk, hogy

$$\underbrace{\left(4x^3y^3 - 2xy\right)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{\left(3x^4y^2 - x^2\right)dy}_{N(x,y)} = 0.$$

Ez a diff.egyenlet egzakt, mivel az M és az N függvények és minden parciális derivátjaik mindenütt értelmezettek és

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 12x^3y^2 - 2x = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Tehát a fenti tétel szerint létezik egy F, melyre $M = \frac{\partial F}{\partial x}$ és $N = \frac{\partial F}{\partial y}$.

Az F potenciálfüggvény meghatározása: Mivel $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y)$, ezért

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx = \int \left(4x^3y^3 - 2xy\right)dx = x^4y^3 - x^2y + f(y).$$

Ezután már csak az $f(y)$ függvényt kell meghatározni. Ezt abból kapjuk, hogy

$$N = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Ezt felírva:

$$\left(3x^4y^2 - x^2\right) = 3x^4y^2 - x^2 + f'(y).$$

Innen $f'(y) \equiv 0$ vagyis $f(y) \equiv C$. Tehát

$$F(x,y) = x^4y^3 - x^2y + C.$$

A fenti tétel értelmében tahát a diff.egyenlet megoldását az $x^4y^3 - x^2y = C$ adja. Itt a megoldást implicit alakban kaptuk meg de ennél többet ilyen egyenleteknél csak speciális esetekben remélhetünk.

Eddig tart az I. Zh anyaga.

14. Differenciálegyenlet-rendszerek

Ebben a fejezetben a független változót t-vel jelöljük, az ismeretlen függvényeket pedig $x(t)$ és $y(t)$-vel. Használni fogjuk a D differenciálás operátorát. Vagyis $x'(t) = Dx(t)$ és $y'(t) = Dy(t)$. Ha azt írjuk például, hogy $(D-5)x$ ez azzal egyenértékű, hogy $x'(t) - 5x(t)$. A differenciálegyenlet rendszerek közül csak a legegyszerűbbeket tekintjük, és ezeknek megoldását a következő példán mutatjuk be:

50. PÉLDA: Oldjuk meg a következő diff.egyenlet rendszert:

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x' & + & y' & - & 4x & - & y & = & e^t \\ x' & & & + & 3x & + & y & = & 0 \end{array}$$

Megoldás: Az egyenlet rendszer a D operátorral:

$$\begin{array}{ccccc} 2(D-2)x & + & (D-1)y & = & e^t \\ (D+3)x & + & y & = & 0 \end{array}$$

A Cramer-szabály szerint egyértelmű megoldás azért van, mert a

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2(D-2) & D-1 \\ D+3 & 1 \end{vmatrix} = -\left(D^2+1\right) \neq 0.$$

A megoldások adódnak a következő két egyenletből:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} e^t & D-1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ és } \Delta y = \begin{vmatrix} 2(D-2) & e^t \\ D+3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ezeket kifejtve:

$$-\left(D^2+1\right)x = e^t \text{ és } -\left(D^2+1\right)y = -4e^t.$$

Ezek megoldásai:

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - \frac{1}{2}e^t$$

és
$$y\left(t\right)=c_3\cos t+c_4\sin t+2e^t.$$
Csak két szabad paraméter lehet, ezért c_3, c_4 kifejezhető c_1, c_2-vel. Az $x(t), y\left(t\right)$ fenti képleteit az egyenletrendszer 2. egyenletébe helyettesítve:

$$\left(\underbrace{c_2+3c_1+c_3}_{0}\right)\cos t+\left(\underbrace{3c_2-c_1+c_4}_{0}\right)\sin t=0$$

ez adja a következő lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcrcl} -3c_1 & - & c_2 & = & c_3 \\ c_1 & - & 3c_2 & = & c_4 \end{array}$$

Vagyis az egyenlet rendszer megoldása:

$$\begin{array}{l} x\left(t\right)=c_1\cos t+c_2\sin t-\frac{e^t}{2} \\ y\left(t\right)=-\left(3c_1+c_2\right)\cos t+\left(c_1-3c_2\right)\sin t+2e^t \end{array}.$$

51. PÉLDA: Oldjuk meg a következő Cauchy feladatot:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x' & - & y & + & 3x & = & 0 \\ y' & & & + & 2x & = & 0 \end{array}\right\} \quad x\left(0\right)=1, y\left(0\right)=3 \tag{83}$$

Megoldás: Felírjuk az egyenletrendszert a D operátor használatával:

$$\begin{array}{r} \left(D+3\right)x-y=0 \\ 2x+Dy=0 \end{array}$$

Kiszámítjuk a $\Delta=\left|\begin{array}{cc} D+3 & -1 \\ 2 & D \end{array}\right|=D^2+3D+2\neq 0$. Tehát a fenti módszer alkalmazható. Ezután a Cramer-szabályból:

$$\Delta x=\left|\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 0 & D \end{array}\right|=0 \ \text{ és } \ \Delta y=\left|\begin{array}{cc} D+3 & 0 \\ 2 & 0 \end{array}\right|=0$$

Ezt kiírva:

$$x''+3x'+2x=0 \text{ és } y''+3y'+2y=0. \tag{84}$$

Ezeket megoldva kapjuk, hogy

$$x\left(t\right)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t} \text{ és } y\left(t\right)=c_3e^{-t}+c_4e^{-2t}.$$

Mivel csak két konstans lehet a négy helyett, mindezt vissza kell helyettesíteni az egyenletrendszer valamelyik, mondjuk a második egyenletébe. Ebből adódik, hogy:

$$\Bigg(\underbrace{2c_1 - c_3}_{0}\Bigg) e^{-t} + \Bigg(\underbrace{2c_2 - 2c_4}_{0}\Bigg) e^{-2t} \equiv 0.$$

Tehát $c_3 = 2c_1$, és $c_4 = c_2$. Ezt visszahelyettesítve a (84) megoldásaiba, kapjuk, hogy a diff. egyenletrendszer általános megoldása:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \\ y(t) &= 2c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}. \end{aligned} \tag{85}$$

A Cauchy-feladat megoldását úgy kapjuk, ha $t = 0$-át helyettesítünk mindkét oldalra és felhasználjuk az $y(0) = 3, x(0) = 1$ kezdeti feltételeket:

$$\begin{aligned} 1 &= x(0) = c_1 + c_2 \\ 3 &= y(0) = 2c_1 + c_2. \end{aligned}$$

Ezen egyenletrendszer megoldásaként kapjuk, hogy: $c_1 = 2$, $c_2 = -1$. Ezeket (85)-ba visszaírva kapjuk a Cauchy-feladat megoldását:

$$\begin{aligned} x(t) &= 2e^{-t} - e^{-2t} \\ y(t) &= 4e^{-t} - e^{-2t}. \end{aligned} \tag{86}$$

Az előbbiek egy alkalmazása: Tegyük fel, hogy a síkon mozog egy pontszerű bogárka a következő feltételek mellett: A bogárka a $t = 0$ időpontban a sík $A = (1, 3)$ pontjában található. A bogárka mozgása során bármely (x, y) pontba is jut, a pillanatnyi sebessége ebben a pontban az $(y - 3x, -2x)$ vektor által adott. Feladat: írjuk le a bogárka mozgását.

Megoldás: Mivel a bogárka az A pontból indul ki és a pillanatnyi sebessége $(x', y') = (y - 3x, -2x)$ ez azt jelenti, hogy a bogárka pályájának x és y koordinátájának időbeli függését leíró $x(t), y(t)$ függvények eleget tesznek a fenti (83) Cauchy feladatnak, vagyis a bogárka pályáját a 51 példa megoldásaként kapott

$$\begin{aligned} x(t) &= 2e^{-t} - e^{-2t} \\ y(t) &= 4e^{-t} - e^{-2t}. \end{aligned} \tag{87}$$

függvények írják le.